This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

22 33 Th. Subt.

Soc. 1996 d. 183/2

60.

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE
ROYALE DES SCIENCES,
CONTENANT
LES OUVRAGES
ADOPTEZ PAR CETTE
ACADEMIE
Avant ſon Renouvellement en 1699.

TOME SECOND.

RESOLUTIONS
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE
PAR M. BLONDEL.
ET
OUVRAGES
DE
MATHEMATIQUE
DE M. FRENICLE.

A AMSTERDAM,
Chez *PIERRE MORTIER.*
MDCCXXXVI.

Contenu de ce Volume.

PROBLEMES DE M. BLONDEL.

PROB. 1. du Contour de l'enflure & diminution des Colonnes. *pag.* 3.
PROB. 2. L'Apollonius François des Tactions. *pag.* 32.
PROB. 3. des Joints de tête des Arcs rampans. *pag.* 107.
PROB. 4. de la Coupe des Poutres. *pag.* 116.

OUVRAGES DE M. FRENICLE.

METHODE pour trouver la Solution des Problemes, par les Exclusions. *pag.* 1.
TRAITE' des Triangles rectangles en Nombres. *pag.* 83.
ABREGE' des Combinaisons. *pag.* 207.
TABLE generale des Quarréz Magiques de quatre côtez. *pag.* 303.

BIBLIOTHECA BODLEIANA

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

Par F. BLONDEL.

A

MONSEIGNEUR COLBERT,

MINISTRE ET SECRETAIRE D'ESTAT, SURINTENDANT DES BASTIMENS, ARTS, ET MANUFACTURES DE FRANCE.

MONSEIGNEUR,

L'estime que vous avez pour les beaux Arts,

oblige tous ceux que en font profeſſion, de vous regarder comme leur Protecteur. Chacun vous offre les fruits de ſon travail comme des biens qui vous appartiennent; & je vous préſente celuy-cy dans le meſme ſentiment, & avec une parfaite reconnoiſſance de la bonté que vous avez eüe de m'aſſeûrer qu'il ne vous ſeroit pas deſagréable.

Vous ſçavez, MONSEIGNEUR, *que toutes les parties des Mathématiques ſont recommandables par les avantages qu'elles aportent dans les affaires du monde; qu'elles ſont utiles dans la Guerre & dans la Paix; & que les grands Hommes s'en ſervent en tout temps, ou pour éxercer leur valeur, ou pour montrer leur magnificence.*

Néanmoins l'Architecture eſt celle qu'ils con-

ſidérent le plus, parce qu'elle achève, pour ainſi dire, leur réputation, & qu'elle conſerve le ſouvenir de leurs victoires, en leur élevant de ſuperbes Trophées.

Un grand Roy comme le noſtre, dont la vie eſt pleine de merveilles, & qui a fait tant de choſes qui paroiſtront incroyables à la poſterité, doit en laiſſer des témoignages immortels, qui confirment ceux de l'Hiſtoire, & qui empeſchent que les ſiécles ſuivans ne la traitent de fabuleuſe. Et rien ne le peut mieux faire que l'Architecture. Certainement, MONSEIGNEUR, *j'oſe dire que cet Art admirable ſervira plus à éterniſer la mémoire de* LOUIS LE GRAND, *que tous les autres Arts qui ſe vantent de donner l'immortalité.*

Mais, MONSEIGNEUR, *c'eſt un bonheur bien particulier pour nous, qui en faiſons noſtre*

principale estude, que Sa Majesté se soit reposée sur vos soins, pour remettre l'Architecture dans son premier lustre. Ce bel Art avoit besoin que vous luy donnassiez un peu de ce temps précieux que vous employez si utilement au service du Roy & de l'Estat, afin qu'il puisse non seulement égaler aujourd'huy ses ouvrages à la beauté de l'Antique, mais mesme les porter à un degré de perfection, où les anciens Edifices n'ont jamais esté, ny dans la Grece, n'y dans l'Empire Romain.

Et comme le nom du Roy surpasse maintenant celuy de tous les Heros de l'antiquité, il falloit un Ministre, aussi habile & aussi zelé pour sa gloire que vous l'estes, pour laisser dans la France des Monumens si magnifiques & si durables de la prosperité de son régne, qu'ils puissent effacer un jour la grandeur de ces anciens Edifi-

fices, dont le temps ſemble reſpecter les ruines.

Pendant que la renommée va repandre par toute la terre le bruit de ſes Exploits & célébrer ſes Conqueſtes & les prodiges inoüis de ſon courage, il eſt bien juſte que l'Architecture & tous les beaux Arts travaillent à l'envy pour rehauſſer l'éclat de ſes Triomphes, & conſacrer la memoire de ſes grandes actions. Je voudrois bien, MONSEIGNEUR, *que ce Traité y pût contribuer quelque choſe: Du moins vous puis-je aſſeûrer que je ne l'ay composé que dans cette veûë, & pour communiquer au public ce que je puis avoir acquis de nouvelles connoiſſances touchant les pratiques les plus difficiles qui ſe rencontrent dans les Baſtimens. Je m'eſtimeray trop recompenſé de mon travail, ſi vous me faites la grace de l'approuver, & d'eſtre perſuadé que*

je

je suis avec beaucoup de respect,

MONSEIGNEUR,

Vostre très-humble
& très-obéissant serviteur,
BLONDEL.

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

DECRIRE *Géometriquement en plusieurs maniéres, & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.*

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'APOLLONIUS *François des Tactions; ou trouver une Section Conique qui touche trois lignes droites données en un mesme plan, & deux de ces lignes en un point donné de chacune: ou bien, décrire Géometriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.*

A TROI-

TROISIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER *Géometriquement les joints de teste de toutes sortes d'Arcs rampans.*

QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

TROUVER *la ligne sur laquelle les Poutres doivent estre coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & résistantes.*

Avec la démonstration des Pratiques, accompagnées de diverses réflexions sur le mouvement, sur la proportion Harmonique, & sur les erreurs de Pappus au sujet de l'inscription des trois médiétez au demicercle, & de Galilée au sujet du dernier Probléme.

RE-

RESOLUTION DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE.

PREMIER PROBLEME RESOLU.

Décrire Géometriquement en plusieurs maniéres & tout d'un trait, le Contour de l'enflûre & diminution des Colonnes.

PREMIER DISCOURS.

Si les divers emplois que j'ay eûs pour le service du Roy chez les Etrangers & dans les principales Provinces de ce Royaume, m'ont donné l'avantage de pouvoir considérer à loisir la plus grande partie des Bastimens an-

ciens & modernes qui ſont dans le monde ; & ſi cette facilité jointe à une inclination particuliére que j'ay toûjours eûë pour l'Architecture & qui m'a fait ſoigneuſement rechercher ce qui pouvoit eſtre de plus remarquable en chacun d'eux, peut m'avoir acouſtumé les yeux à quelque diſcernement de ce qu'on appelle *Grand* & *Beau* dans cét Art : Il me ſemble que j'ay quelque droit de dire mes ſentimens ſur ſon ſujet & d'aſſûrer que l'Architecture a beſoin d'étude, pour arriver à ſa perfection. Et quoy que je ne ſois pas aſſez ſçavant pour me vanter de connoiſtre ce qui luy manque, (cét Art ſuppoſant un trop grand amas de connoiſſances profondes & une expérience conſommée ;) je reſſens au moins une joye extraordinaire, lors que je voy qu'il s'y fait quelque progrés.

C'eſt ce qui fait que j'ay beaucoup eſtimé la penſée de celuy qui propoſa pour *Eſtrénes à tous les Architectes*, au commencement de l'année 1664. un *Paradoxe*, comme il dit, c'eſt à dire, un Probléme *à reſoudre touchant la perfection de l'enflûre ou* ἔντασις *des Colonnes, touchée imparfaitement par Vitruve & non encore reſoluë ny réglée qu'imparfaitement, quoy qu'Architectoniquement elle le puiſſe eſtre parfaitement*, qui ſont les termes dont il s'eſt ſervi.

Et j'ay crû, dis-je, qu'un homme eſtoit doublement loüable, qui ne ſe contentant pas de rechercher ce qui n'eſt pas encore connu dans les Sciences, & de conſacrer au Public le fruit de ſon travail & de ſes veilles, vouloit encore exciter les autres à ſon éxemple, & réveilloit leur vertu endormie, en leur propoſant à réſoudre ce qu'il auroit déja pû reconnoiſtre par ſon étude. D'autant plus que c'eſt à un ſentiment tout ſemblable que nous devons ce que nous avons de plus beau dans les Mathématiques, & qu'il paroiſt qu'il ne s'eſt jamais fait de plus notable progrés dans ces ſciences, que lors que les grands Genies ſe ſont, dans divers ſiécles, propoſez l'un à l'autre des queſtions, & que par une eſpéce d'émulation honneſte leur ame s'eſt enflammée de cette généreuſe ambition, qui nous a produit des Ouvrages ſi excellens, qu'ils ſem-

ſemblent eſtre plûtoſt partis de l'intelligence des Anges, que de la méditation laborieuſe de l'eſprit humain.

Et comme l'Architecture n'a receû ce qu'elle a de bon & de magnifique que des ſciences Mathématiques, qui par l'indubitable verité de leurs démonſtrations rempliſſent entiérement la capacité de noſtre eſprit, & ne luy laiſſent rien à déſirer ſur le ſujet qu'elles luy ont expliqué : Il eſt aiſé de comprendre que c'eſt d'elles qu'elles doit encore attendre ce qui manque à ſa perfection ; & que cette lumiére, par qui l'on connoiſt la différence qu'il y a de pouvoir rendre raiſon de ſon Ouvrage, ou de travailler en taſtonant, & à l'aveugle, ne luy peut venir que des mains libérales de la Géométrie.

Combien donc ſeroit-il à ſouhaitter, que ceux qui travaillent en Architecture vouluſſent auſſi s'appliquer aux Mathématiques, ou que ceux qui ſe ſont avancez dans ces ſciences donaſſent auſſi quelque partie de leur temps à l'Architecture ? Et l'on doit pour ce ſujet eſtimer & recevoir agréablement toutes les choſes qui peuvent contribuër à porter les hommes à cette étude, au nombre deſquelles je mettrois ce *Paradoxe*, ſi l'Auteur s'y eſtoit un peu plus clairement expliqué qu'il n'a fait, & s'il avoit donné à entendre quelle eſt cette maniére de diminuer les Colonnes, qu'il appelle *Parfaite* : parce que ces ſortes de diſpoſitions, qui ne ſont que pour la ſatisfaction de l'œil, & qui n'ont point de fondement certain ny arreſté dans la nature, dépendent tellement du gouſt, & de la diverſité des opinions, qu'une Colonne peut paroiſtre aux uns trop *Suelte*, ainſi que les Italiens les appellent, ou déliée, que d'autres la trouveront trop écraſée.

De ſorte, qu'il ſemble que pour travailler avec quelque fruit à la ſolution de ſon *Paradoxe*, il auroit eſté juſte qu'il euſt déterminé ce qu'il entend par ce mot de *Parfaitement*, & qu'on put comprendre, ſi cette façon de deſcription qu'il propoſe *à reſoudre Architectoniquement*, eſt déja en quelque uſage, au moins méchanique, parmi les Ouvriers ; ou ſi c'eſt une maniére toute nouvelle,

& d'une forme différente de toutes celles dont on a juſqu'icy diminué les Colonnes: eſtant vray que ces Propoſitions vagues & indéterminées, & en l'explication deſquelles le ſort a plus de part que le raiſonnement ou la vivacité de l'imagination, ſont d'autant plus défectueuſes, que l'honneur meſme qui ſeroit dû à celuy qui auroit expliqué l'énigme, ne dépend que du caprice de celuy qui propoſe, lequel peut diſſimuler tant qu'il luy plaiſt, & toûjours dire que l'on n'a pas encore trouvé ce qu'il demande.

Tant y a, que m'eſtant ſouvenu d'avoir autrefois remarqué, en traçant des Colonnes à la maniére que Vignole enſeigne pour les Ioniques & Corinthiennes, que la ligne de leur Contour eſtoit celle de Nicomédes: je dis à M. Boſſe, qui me fit voir au mois de Janvier de la meſme année 1664. ces *Eſtrénes à tous les Architectes*, que bien que je n'euſſe point l'art de deviner, & que je confeſſaſſe ingenuëment mon ignorance ſur le ſujet de ce *Paradoxe*, je voulois néanmoins propoſer plus nettement un Probleme de la meſme nature à ſon Auteur, que je mis par maniére de jeu ſur le dos de ſon écrit, en ces termes. *Autre Probléme. Le moien de décrire tout d'un trait, & ſans s'embaraſſer de pluſieurs points trouvez dont on ſe ſert pour les Cherches, la maniére la plus élégante qui ſoit en uſage parmy les Architectes modernes pour ἔντασις & diminution des Colonnes? Et quelle en eſt la figure?*

Quelque jours aprés le ſieur Boſſe m'ayant prié de luy vouloir expliquer ma penſée, je luy fis ſur ce ſujet la Lettre qui fait le diſcours ſuivant.

SE-

SECOND DISCOURS, OU LETTRE A M. BOSSE SUR LE MESME

sujet de l'enflûre & diminution des Colonnes, & de la description de la ligne qui fait le Contour des Ioniques, Corinthiennes, & composées.

MONSIEUR, Je n'ay pas la science de deviner pour vous dire quels sont les sentimens de celuy dont vous me parlez sur le Probleme ou *Paradoxe*, comme il dit, qu'il a proposé pour *Estrénes à tous les Architectés* : Mais je puis bien vous entretenir de la solution de celuy que j'écrivis derniérement au dos de son imprimé, dans laquelle je vous asseûreray premiérement avec franchise que je n'ay aucune part, puis qu'il y a plus de deux mille ans qu'elle est trouvée, & que je ne puis tout a plus me glorifier d'autre chose, que de m'estre autrefois apperceû, en desseignant des Colonnes diminuées a la maniére éléganté que Vignole dit avoir inventée pour les Ioniques & Corinthiennes, que *la Cherche courbe qui la décrit, est la ligne de Nicomédes, que l'on appelle la première Conchoide des Anciens*; & par le moyen de laquelle, au rapport d'Eutocius, ce Géométre prétendit avoir resolu ce fameux Probléme *de la Duplication du Cube commandée par l'Oracle*, & qui a tant exercé les esprits du siécle de Platon dans la recherche *de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données*. C'est celle-la mesme que M. Viette a de nostre temps supposée comme une pétition ou demande au supplément de Géometrie pour resoudre tous les Problémes solides, & dont les Equations vont au Cube ou au quarré quarré; ne jugeant pas que sa description, par le moyen de l'instrument de Ni-

Nicomédes, fust plus méchanique, ou pour mieux dire, moins Géometrique, que celle du Cercle par le moien du Compas, dont l'usage est néanmoins receû par ce principe de pétition ou demande dans le premier des Elémens d'Euclide. Et quoy que ces mesmes Equations se resolvent plus noblement dans les livres de M. Descartes, par la seule intersection du Cercle & de la Parabole, qui sont lignes d'un genre plus simple & moins composé que la Conchoide; celle-cy ne laisse pas d'avoir ses usages pour les solutions des Equations plus élevées; & les suppositions de M. Viette sont trés-sçavantes & trés-véritables.

Mais pour retourner à nostre propos : Quoy que vous sçachiez parfaitement cette invention élégante de Vignole, & que vous la puissiez voir dans son Livre, je ne laisseray pas de vous en tracer icy la figure avec son discours, selon la traduction de l'illustre M. le Muet, afin que vous puissiez mieux juger du raisonnement que je feray ensuite.

Figure I. de la I. Planche.

Quant à cette autre façon, dit-il, *je l'ay trouvée de moy-mesme; & quoy qu'elle soit moins connuë, elle est néanmoins facile à concevoir par les lignes. Je diray donc qu'ayant resolu les mesures de la Colonne*, c'est à dire, sa hauteur & grosseur, & la diminution qu'elle doit avoir au bout d'enhaut, *on doit tirer une ligne à l'infini en commençant par C*, qui est au tiers du fust de la Colonne, *& continuant par D; puis rapportant la mesure C D au point A*, où finit la diminition du haut, *jusqu'à ce qu'elle coupe la perpendiculaire au point B, & que A B soit continuée jusqu'en E. De là on pourra tirer tant de lignes qu'on voudra qui partiront de la perpendiculaire, & iront à la circonférence de la Colonne, sur lesquelles appliquant la mesure C D, on trouvera tant en haut qu'en bas l'enflûre de la Colonne; & cette maniére peut estre appliquée à l'Ionique, Corinthien & Composé.*

Ou vous voyez, Monsieur, que toutes ces lignes qui, partant du point E, sont comprises entre la Perpendiculaire ou Axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entre elles, &

à

à la droite CD. De ſorte que ſi nous appellons le point E, le *Pole*; l'Axe de la Colonne, *la Règle* ou *Canon*; & la ligne CD, *l'Intervalle*: je ne voy plus rien qui m'empeſche d'appeller la ligne courbe qui paſſe depuis A par toutes les extrémitez recherchées, *la première Conchoïde des Anciens*, puis que c'eſt toute la meſme; & que vous connoiſtrez encore mieux par l'inſtrument que Nicomédes a inventé pour la décrire, dont la figure eſt la ſeconde de la premiére Planche; en laquelle, aprés avoir déterminé comme deſſus la largeur de la Colonne, dont la moitié eſt CD, & trouvé la longueur de la ligne CE, il faut prendre trois régles de bois ou de métail GF, ID, HA, dont les deux GF, & ID, ſont attachées enſemble à l'équerre ou à angles droits comme en D; & par le milieu de la régle GF il faut entailler un petit canal à queuë d'aronde qui s'étende en toute la longueur de la régle. Il s'en fait une autre de meſme dans le milieu de la régle HA, qui s'étende indéfiniment vers le bout H, mais qui vers l'autre bout ſe termine en K, en ſorte néanmoins que la diſtance AK, ne ſoit pas plus grande que la diſtance CE. Enſuite il faut faire au bout de la régle HA vers le point A, la ligne AB égale à la ligne CD, & attacher par deſſous la régle au point B un bouton de bois ou de métail qui puiſſe couler juſte dans le canal de la régle GF. Il en faut attacher un autre ſemblable au point E, dans le milieu de la régle ID, qui coule juſte dans le canal de la régle AH, afin que la régle GF eſtant appliquée à l'axe de la Colonne, en ſorte que le point D réponde au renflement, & la régle AH ſe mouvant en avançant ou reculant ſur le bouton E, comme ſur un pivot ou Pole, tandis que le bouton B ſe meut au long dudit axe, c'eſt à dire, au long du Canal de la régle GF; le point A décrive par ces deux mouvemens la ligne courbe AaaCa, pour le contour de la diminution & renflement de la Colonne qui eſt appellée ἔντασις par Vitruve, & dans laquelle ligne toutes les droites, comme *ba*, tirées du Pole, & compriſes entre le Canal de la régle GF, c'eſt à dire, entre

Fig. II. de la I. Planche

tre l'axe de la Colonne & sa Circonférence, sont toutes égales entr'elles, & à l'intervalle AB, ou CD. En quoy il paroist que la ligne courbe que cét instrument a décrite, est la mesme que celle que Vignole a prétendu décrire. Et si vos régles estant d'une grandeur indéfinie, vous faites en sorte que les boutons B & E puissent tellement s'avancer ou reculer au long des régles AH & DI, que les intervalles, comme AB & CE, puissent aussi estre pris sur lesdites régles de telle grandeur que l'on voudra; il est évident que cét instrument pourra servir à décrire les Courbes des Colonnes, de quelque hauteur ou grosseur qu'elles puissent estre, puisque toute leur différence ne consiste qu'en celle desdits intervalles. L'autre costé de la Colonne sera décrit en la mesme maniére en changeant l'Instrument de place, & le rapportant de l'autre part.

Ainsi, Monsieur, il me semble que mon Probléme est assez bien résolu par cét instrument; & que sans s'embarasser à rechercher ces points infinis, commme veut Vignole, par lesquels on puisse méner doucement cette cherche, qui de soy dans la rigueur est toûjours imparfaite, on peut doresnavant tirer cette ligne tout d'un trait, uniformement & en sa perfection.

C'est de quoy j'ay voulu vous faire part, en attendant que nous ayons de l'Auteur du *Paradoxe* quelque chose de considérable sur cette matiére, ainsi qu'il y a lieu de l'espérer par ses *Estrénes*. Vous asseurant au reste que bien qu'il y ait raison d'estre surpris, que depuis tant de siécles qui ont produit de si grands Hommes pour l'Architecture, lesquels ont si bien tracé les diminutions & l'enflûre des Colonnnes, personne, au moins que je sçache, n'ait fait réflexion à cette maniére de description que le seul Vignole, & que depuis luy tant de braves Architectes se soient heureusement servis de son invention, sans avoir rien dit de la nature de la Courbe qu'elle produit, ny du moyen de la desseigner tout d'un trait: Quoy qu'il y ait, dis-je, beaucoup de sujet de s'en étonner, je vous proteste néanmoins que je n'ai aucune vanité que cet-

çette penſée me ſoit venuë, de laquelle je me glorifie moins que de l'honneur que vous me faites de m'aimer. Je ſuis, *&c.*

Ce 24. Janvier 1664.

TROISIEME DISCOURS

SUR LA NATURE ET DESCRIPTION de la ligne qui fait le Contour des Colonnes Doriques & Toſcanes.

AYANT ainſi diſcouru ſur les propriétez de la ligne Courbe qui fait le Contour des Colonnes Ioniques, Corinthiennes & compoſées, j'ay voulu conſidérer l'autre maniére que Vignole décrit, & dont il ſe ſert pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques. Et aprés avoir ſoigneuſement médité ſur la nature de la Ligne qu'elle produit; j'ay reconnu que c'eſtoit une Ligne de la meſme nature que celle que décriroit une fléche, ou toute autre choſe tirée & jettée horizontalement, dans l'opinion de ceux qui croient qu'un poids tombant de la ſurface de la terre ſe trouveroit juſtement au bout de ſix heures au Centre (ſi la terre ſe mouvoit du mouvement journalier,) & paſſant outre par la force qu'il auroit aquiſe en ſa cheûte, il arriveroit au bout d'autres ſix heures à la ſurface des Antipodes, ſi le chemin luy eſtoit ouvert: D'où deſcendant & repaſſant en ſix heures une autre fois par le Centre, il ſe trouveroit au bout d'un jour préfix au meſme lieu d'où il eſtoit premiérement parti, ſi l'air, ou les autres empeſchemens du dehors ne l'arreſtoient.

Je dis donc qu'un trait pouſſé vigoureuſement, & paralléle à l'horizon décriroit en ſon paſſage une Ligne de la meſme nature

de celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques, si cette opinion estoit veritable: parce qu'estant porté d'un mouvement de Lation égale & uniforme, qui luy est imprimé par l'impulsion, & qui fait que les distances qu'il parcourt sont entre elles en mesme proportion que les temps qu'il emploie à les parcourir, (c'est à dire, comme les Arcs de l'Equateur qui passent cependant sous le Meridien,) & d'un autre mouvement inégal, & qui s'augmente continüellement, que son propre poids luy inspire, & qui dans l'opinion susdite se fait sur la proportion des Sinus verses des mesmes Arcs de l'Equateur; il paroist que la Ligne, que ce trait décriroit en son passage, seroit composée de ces deux mouvemens, dont l'un est égal, uniforme, & répondant aux Arcs de l'Equateur; l'autre inégal, continüellement précipité, & répondant aux Sinus verses des mesmes Arcs.

Mais la Ligne du Contour des Colonnes Toscanes & Doriques se fait par la composition de deux mouvemens pareils, ainsi que je le démontrerai cy-dessous; & partant la Ligne que décrivent les corps jettez horizontalement, comme un trait ou une fléche dans l'opinion susdite, est à peu prés la mesme que celle dont on se sert pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

Fig. I. de la II. Planche. Pour la démonstration de ce que je viens de dire, il ne faut que se souvenir de la pratique ordinaire des Ouvriers pour la déscription de cette Ligne, qui se fait en cette maniére. La Ligne A C, soit l'Axe d'une Colonne à diminuer, & les deux tiers de sa longueur, si on veut que la diminution commence au tiers; ou la moitié, si on desire qu'elle commence dans le milieu de la Colonne: La Ligne A B, soit le module ou la moitié de sa grosseur, sur laquelle comme rayon soit fait le Cèrcle B S T V Z. Ensuite il faut prendre la partie A G, pour le demidiamétre de la Colonne par le haut, en sorte que B G soit sa plus grande diminution, & tirer la Ligne G E parallele à A C, qui coupera le Cercle en F, la portion

tion duquel B F, doit estre partagée en autant de parties égales qu'on voudra, comme aux points S, T, V, aussi bien que l'Axe A C, aux points H, K, M, en sorte que la ligne A C contienne autant de parties égales que l'Arc B F. Enfin des points des divisions de l'Axe il faut élever des Perpendiculaires, comme HI, KL, MN, qui soient rencontrées aux points O, X & Y, par d'autres lignes paralleles à l'Axe, & tirées des points de l'Arc B F, de telle maniére qu'elle se répondent reciproquement l'une à l'autre, c'est à dire, que celle qui part du premier point de l'Axe H, comme H O I, soit rencontrée en O, par celle qui vient du premier point de l'Arc S, comme P S O, & celle qui part du second point de l'Arc T, comme Q T X, se termine en X, sur celle qui vient du second point de l'Axe K, comme K X L, & ainsi des autres. Et passant par tous les points B O X Y E une ligne adoucie, elle fera celle que l'on cherche pour la diminution des Colonnes Toscanes & Doriques.

Et si nous appellons le point B, *le sommet* de cette ligne Courbe la ligne A B, *l'Axe* ou *le Diamétre*, les lignes PO, QX, RY, GE, *&c. les ordonnées*; on verra que l'ordonnée QX, contenant autant de parties de la ligne A C, ou de son égale G E, que l'arc B T en contient de celles de l'arc B F, l'ordonnée QX, est à l'ordonnée G E, comme l'Arc B T, est à l'Arc B F; & la mesme chose se pouvant dire de toutes les autres, il paroistra que les ordonnées seront entre elles comme les Arcs qui sont compris entre le sommet & lesdites ordonnées: & partant que cette ligne Courbe est une espéce de *Spirale ou Ovale*.

De plus, si nous prenons le rayon A B, pour Sinus total, les portions de l'Axe B P, B Q, BR, B G, *&c.* seront les Sinus verses des Arcs, B S, B T, B V, B F, *&c.* & par conséquent nous pourrons appeller cette Courbe *une ligne Spirale ou Eliptique, dans laquelle les portions de l'Axe sont les Sinus verses des Arcs, qui sont entre eux comme les ordonnées.*

 Main-

Maintenant si nous faisons une autre hypothése, & si nous prenons le point A, pour le centre de la terre, la ligne BA, pour le demidiamétre, & l'arc BVF, pour une portion de l'Equateur: Il est constant que dans la pensée de ceux, qui ainsi que nous avons dit cy-dessus, croient qu'un poids tombant librement de la surface de la terre parcouroit les espaces de son Diamétre, en la mesme raison que sont les Sinus verses des Arcs de l'Equateur, qui passeroient cependant sous le Meridien; ce mesme poids (supposé que la terre se meut du mouvement journalier) arriveroit nécessairement au centre, quand le quart de l'Equateur auroit passé depuis le moment de sa cheûte, je veux dire, au bout de six heures. C'est à dire, que le poids tombant du point B, arriveroit au point P, lors que le premier Arc de l'Equateur BS, auroit coulé, & qu'il parcouroit la ligne BQ, en autant de temps qu'il faudroit à l'arc BT, pour passer sous le Meridien; & la ligne BG en autant de temps qu'il en faudroit à l'Arc BF; & enfin la ligne BA, c'est à dire, tout le demidiamétre, en autant de temps que l'Arc BZ, c'est à dire, le quart de Cercle de l'Equateur. Et comme le quart de Cercle de l'Equateur passe précisément en six heures, il se voit qu'en cette opinion le poids tombant du point B, & passant par les portions du demidiamétre BA, dans les mesmes temps qu'il faudroit pour passer les Arcs de l'Equateur dont lesdites portions sont les Sinus verses; ce mesme poids (supposé le mouvement journalier de la terre) arriveroit au bout de six heures précises au centre: d'où remontant en proportion contraire à sa cheûte, & par la mesme raison des Sinus verses, il arriveroit au bout d'autres six heures à la surface de la terre opposée, de laquelle il retomberoit une autre fois en mesme espace de temps jusqu'au centre; & enfin il retourneroit au bout de vingt-quatre heures précises au point B, d'où il estoit premiérement parti.

Supposé donc que ce soit là le genie & la nature des choses pésan-

ſantes ; ſi nous prenons la ligne B D pour l'eſpace, qu'une fléche tirée horizontalement du point B doit parcourir dans le temps que l'Arc B F de l'Equateur ou ſon Parallèle aura paſſé ſous le Meridien, il eſt conſtant que la fléche ſera cependant deſcenduë par ſon propre poids de toute la longueur de la ligne B G, qui eſt le Sinus verſe du meſme Arc B F. Et ſi nous diviſons le ſuſdit Arc B F en parties égales comme aux points S, T, V, & la ligne B D, ou ſon égale A C, en autant d'autres, aux points I, L, N ou H, K, M, ainſi qu'il s'eſt dit ; il ſe verra que le mouvement de Lation, qui a eſté communiqué à la fléche par l'impulſion, ſelon la ligne B D, eſtant uniforme, la fléche aura couru l'eſpace B I dans le meſme temps que l'Arc B S aura paſſé : & comme cependant elle ſera deſcenduë par ſon poids de la longueur de la ligne B P ou I O, la fléche ſe trouvera alors au point O, où les deux lignes, de Lation uniforme B I, ou P O, & de cheûte B P ou I O, ſe rencontrent. Tout de meſme elle ſera en X quand l'Arc B T aura paſſé, parce que c'eſt en ce point où ſe trouvent la ligne de Lation égale B L ou Q X, & celle de la cheûte B Q ou L X, qui ſe font l'une & l'autre dans le meſme temps du paſſage de l'Arc B T. Et la meſme choſe ſe pouvant dire de tous les points de la courbe B O X Y E ; il eſt évident que c'eſt celle que décriroit une fléche en l'hypotéſe ſuſdite ; & que par conſéquent cette ligne eſt la meſme que celle qui eſt décrite pour la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques : ce qu'il falloit démontrer.

Inſtrument pour décrire le trait de la diminution des Colonnes Toſcanes & Doriques.

Que ſi l'on deſire en décrire la figure tout d'un trait, & ſans eſtre obligé de ſe ſervir de pluſieurs points trouvez, on peut faire un inſtrument aſſez commode pour cét effet, qui doit eſtre composé d'un Secteur de Cercle, d'une roûë avec ſon pignon, d'une régle endentée & d'une autre régle, (comme en la ſeconde Figure de la ſeconde Planche) où le Secteur A B F eſt le meſme que celuy de la premiére Figure de la ſeconde Planche que nous avons expliquée ; c'eſt à dire, que les lignes A B & A F de la ſeconde Figure ſont égales au module ; & l'Arc B F

Fig. II. de la II. Planche.

à

à celuy qui eſt compris entre les deux lignes BD & GE de la premiere Figure, qui font l'intervalle de la plus grande diminution de la Colonne. Cét Arc BF dans ladite ſeconde Figure doit eſtre entrecoupé de dents, qui s'enchaſſant dans les dents du pignon C, le faſſent mouvoir, & donner le tour à la roûë LIK, qui dans la circonférence a d'autres dents égales & entrelacées avec celles de la régle GH, afin que par le mouvement circulaire de la roûë, la régle GH ſe puiſſe également avancer en ligne droite. Enfin il faut prendre une autre régle comme ES qui ſoit égale & parallele à la premiére GH, & tellement attachée à ſes extrémitez E & S, qu'elle ſe meuve en avançant avec elle, & conſervant ſon paralleliſme, en ſorte toutefois que rien ne l'empeſche cependant de s'approcher vers le point A, & de ſuivre l'attraction continüelle qui eſt faite par une autre petite régle comme BD, qui eſtant attachée à un pivot ſur lequel elle puiſſe tourner au bout de l'Arc en B, embraſſe de ſon autre extrémité D ladite régle ES, & la contraigne de ſuivre la deſcente de l'Arc, ſans embaraſſer cependant le mouvement droit & en avant qui luy eſt communiqué par la régle GH.

Il paroiſt par cette conſtruction que ſi le diamétre de la roûë LIK eſt au diamétre du pignon C, comme la ligne IH, c'eſt à dire, les deux tiers de la Colonne, eſt à la longueur de l'Arc BPF; & ſi les dents du pignon ſont égales à celles du ſuſdit Arc, & celles de la roûë LIK à celles de la régle GH; il s'enſuivra que la régle endentée GH s'avancera uniformement depuis I juſqu'en H dans les meſmes intervalles de temps que l'Arc BF paſſera auſſi uniformement ſous le pignon C depuis F juſqu'en B; de telle ſorte que le bout de la régle H ſe trouvera préciſément en R, lors que le point B ſe trouvera en P, & qu'il y aura meſme proportion de toute la ligne IH à ſa partie IR, que de tout l'Arc BF à ſa partie BP, & ainſi des autres.

Il s'enſuivra de plus, que tandis que la ligne ES ſera portée uniformement en avant vers H par le mouvement de Lation égale de la régle

régle GH, elle sera encore portée d'un autre mouvement vers le point A, qui luy sera communiqué par l'attraction continüelle de la régle BD, laquelle estant attachée au point B, fera que la ligne ES descendra selon la proportion des Sinus verses des portions de l'Arc BF; c'est à dire, que lors que la partie de l'Arc BF aura passé depuis le point F jusqu'en P, & que cependant la ligne ES aura coulé par le mouvement de la régle GH depuis I jusqu'en R; la mesme ES sera aussi descenduë de toute la distance RQ ou FN, qui est le Sinus verse de l'Arc FP, en telle sorte qu'elle se trouve alors au point Q. Et lors que l'Arc entier BF aura passé depuis F jusqu'en B, & que cependant la ligne ES aura coulé jusqu'en H, elle sera aussi descendüe de toute la ligne HS ou FM, qui est le Sinus verse dudit arc FB, & en cette maniére elle se trouvera au point S, aprés avoir décrit, en son passage composé des mouvemens des deux régles GH & BD, la ligne Courbe IQS, qui est celle que l'on cherche.

Cette description est la mesme que celle de Vignole, qui fait ses Colonnes Toscanes & Doriques également grosses depuis la base jusqu'au tiers de leur hauteur, où il commence leur diminution, & la continüe jusques sous le chapiteau. Mais si on vouloit que la diminution commençant au susdit tiers se fist aussi uniformement de part & d'autre, & aussi bien vers la base que vers le chapiteau; il ne faudroit qu'ajouster au Secteur ABF, une autre Secteur ABT égal à la moitié dudit Arc ABF; afin que passant sous le pignon C de la part de K, & donnant un mouvement contraire au haut de la roüe LIK, la régle IG fust poussée également vers le point X, où elle arriveroit lors que le susdit Arc BT auroit passé sous le pignon, & que cependant la regle ES, ou plûtost OV, seroit descenduë depuis F jusqu'en N, c'est à dire, depuis X jusqu'en V, où elle se trouveroit, aprés avoir décrit en son passage la ligne Courbe IV, qui est la mesme que la ligne IQS continüée de la part de V. Et ainsi l'on auroit toute la ligne VIQS pour le Contour d'un costé de la Colonne, lequel pourra estre transferé de

l'aute part, si on veut avoir son entiére description.

Et quoy que cette maniére paroisse défectueuse, en ce qu'elle semble ne pouvoir estre propre que pour la délinéation de la diminution d'une Colonne dont la longueur & grosseur seroit déterminée, & qu'il faudroit autant d'instrumens différens, qu'il y peut avoir de différentes mesures de Colonnes, c'est à dire, infinies; il s'y peut néantmoins trouver un remede assez facile, & donner à cette Machine la mesme universalité pour les Colonnes Toscanes & Doriques, que nous l'avons attribuée au discours cy-dessus, à celle de Nicomédes pour les Ioniques, Corinthiennes & Composées.

Il ne faut que faire la régle endentée & le Secteur d'une grandeur indéfinie, & marquer ses dents en forme de rayons partans du Centre, & remplir les espaces qu'ils font entre eux en s'écartant, en sorte qu'ils soient toûjours égaux aux intervalles des dents du pignon, afin que sur la longueur du Rayon qui passe par le point B, on puisse hausser ou baisser le pivot, sur lequel tourne la régle B D selon la mesure du module donné de quelque Colonne que l'on propose.

QUATRIÉME DISCOURS.

APPLICATION DES SECTIONS Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

J'AUROIS terminé ces raisonnemens sur lesquels il semble que je me suis suffisamment estendu, si le discours précédent ne m'avoit fait faire une nouvelle réflexion sur le mesme sujet, qui est que tout ainsi que sur l'opinion de quelques-uns touchant la nature du mouvement d'un poids qui tombe, nous avons démontré que les corps jettez horizontalement décrivoient une ligne à-peu-prés pareille à celle dont on se sert pour le trait de la dimi-

nu-

nution des Colonnes Toſcanes & Doriques; il me ſemble que ces meſmes corps jettez décrivant une autre eſpéce de ligne dans l'opinion que quelques-autres ont eûë du meſme mouvement, on peut préſumer que cette ligne pourroit eſtre de quelque utilité pour la délinéation des meſmes Colonnes.

Et comme l'une & l'autre de ces deux opinions eſt fondée ſur des raiſons également probables, & marchent ſur des proportions ſi prochaines, qu'il eſt preſque impoſſible que l'eſprit humain les puiſſe diſcerner l'une de l'autre par l'expérience, ou les convaincre de faux dans les hauteurs qui ſont à noſtre connoiſſance; il y a auſſi grande apparence que les lignes des corps jettez, que nous pouvons appeller *lignes de Projection* tirant leur origine de principes ſi ſemblables & ſi proches, ne doivent pas auſſi eſtre fort différentes, ou d'une nature ou figure extrêmément éloignée l'une de l'autre.

Tant y a que les meſmes eſpaces qui dans l'opinion cy-deſſus expliquée eſtoient parcourus par un poids qui tombe en certains intervalles de temps égaux, ſelon la ſuite des Sinus verſes des Arcs égaux de l'Equateur; les meſmes intervalles, dis-je, ſont paſſez dans une autre opinion en meſmes temps ſelon la ſuite des nombres impairs, en ſorte que ſi dans le premier moment de ſa cheûte il parcourt 1 de ces eſpaces, il en paſſera 3 dans le ſecond, 5 dans le troiſiéme, 7 dans le quatriéme, 9 dans le cinquiéme, 11 dans le ſixiéme, & ainſi à l'infini.

Et parce que dans le premier temps il a paſſé 1 eſpace, & 3 eſpaces dans le ſecond temps, il aura parcouru 4 eſpaces dans le premier & ſecond tems enſemble, c'eſt à dire, en 2 temps; & 1, 3, & 5 eſpaces, c'eſt à dire, 9 dans le premier, ſecond & troiſiéme, ceſt à dire, en 3 temps; & 1, 3, 5, & 7, c'eſt à dire, 16 eſpaces dans le premier, ſecond, troiſiéme & quatriéme, c'eſt à dire, en 4 temps, & ainſi des autres. Où il ſe voit que comme le nombre 4 des ſeconds eſpaces eſt le Quarré de 2 qui eſt le nombre des ſeconds temps, & 9 qui eſt le nombre des troiſié-

mes eſpaces eſt le Quarré de 3 nombre des troiſiémes temps, & 16 nombre des quatriémes eſpaces eſt le Quarré de 4 nombre des quatriémes temps, & ainſi des autres; c'eſt à dire en un mot, que parce que les nombres impairs ajouſtez conſécutivement l'un à l'autre produiſent la ſuite des premiers Quarrez; il s'enſuit par conſéquent que les nombres des eſpaces ſont entre eux comme les Quarrez des nombres des temps, & que la raiſon de ceux-là eſt double de celle de ceux-cy.

La vrayſemblance de ces deux opinions ſe connoiſt auſſi par la proximité des nombres des eſpaces qui ſe parcourent en l'une & en l'autre dans les meſmes temps, qui eſt telle, que ſi au premier moment il ſe fait un eſpace, au ſecond il s'en fera 3 dans une opinion, & environ 3 moins $\frac{1}{12}$ dans l'autre, au troiſiéme il s'en paſſera 5 dans l'une, & 5 moins $\frac{1}{6}$ dans l'autre, au quatriéme 7 dans l'une, & 7 moins $\frac{1}{4}$ dans l'autre, au cinquiéme 9 dans l'une, & 9 moins $\frac{1}{3}$ dans l'autre; & ainſi conſecutivement à l'infini. Où il paroiſt que ces différences ſont ſi petites, & ſi peu remarquables dans les hauteurs où nous pouvons faire les expériences, qu'il eſt abſolument impoſſible d'aſſeûrer avec certitude de la vérité ou fauſſeté de l'une ou l'autre de ces deux opinions.

Galil. de motu. Ce que Galilée a ſi bien reconnu, que bien qu'il ſoit l'Auteur de l'opinion qui ſoûtient que les eſpaces ſuivent la progreſſion des nombres impairs, & que ſur ce principe il ait compoſé un Livre entier du mouvement rempli d'un grand nombre de propoſitions ingénieuſes; il a néanmoins trouvé l'autre opinion ſi belle, qu'il n'a pû s'empeſcher de la produire comme ſi elle venoit de luy *Galil. 2. de Siſtem. coſm.* dans le deuxiéme de ſes Dialogues du Siſtéme du Monde, & d'en parler d'une maniére à faire croire que ce fut ſon véritable ſentiment. Il y explique meſme quelques propriétez de ce mouvement ſur ce principe, leſquelles ſont tout-à-fait admirables; & celle-cy entre autres, que ſuppoſé le mouvement de la Terre, la ligne qu'un poids tombant de ſa ſurface au Centre décriroit par ſa cheûte, ſeroit Circulaire, & égale à celle qu'il déſigneroit, s'il ne partoit pas de ladite ſurface.

Sur

Sur quoy je dirai en paſſant, que pour faire en ſorte que cette propoſition ſoit véritable, il faut non ſeulement ſuppoſer que la Terre ſe meut, mais meſmes qu'elle ne ſe meut que de ſon mouvement journalier, c'eſt à dire, ſur ſon propre centre; parce que ſi l'on y veut ajouſter l'annuel, ces lignes ceſſeront d'eſtre Circulaires, & deviendront plûtoſt des eſpéces Cycloïdes ou Roulettes, *ou meſme des Spirales*, auſſi bien celle que décrit un Poids qui tombe, que celle qui eſt faite par le point de la ſurface de la Terre, duquel il eſt parti pour tomber. Et c'eſt peut-eſtre la raiſon qui fait dire ſur la fin de ſon diſcours ſur ce ſujet à Galilée, que n'oſant pas aſſeûrer que ce ſoit-là la nature des corps qui tombent, il peut au moins avancer cette propoſition, que ſi la ligne de leur cheûte n'eſt pas cette Circulaire, c'en eſt une autre qui luy reſſemble, & qui ne s'en éloigne que de fort peu.

Mais pour retourner à noſtre propos, le meſme Galilée ayant démontré que ſur l'hypothéſe de la cheûte des poids en proportion des nombres impairs, la ligne de Projection eſt Parabolique, qui dans l'autre hypothéſe eſtoit Spirale; & comme la Parabole & la Spirale ont d'ailleurs un ſi grand nombre de propriétez communes, qu'elles ont fait dire à un grand Géometre de noſtre temps, que *la Parabole n'eſtoit qu'une Spirale dévelopée*; il y a grande apparence que l'effet de l'une en la diminution des Colonnes pourroit auſſi eſtre heureuſement produit par l'autre. P. *Greg. à S. Vincentio.*

I.

Pour la Parabole.

C'EST ce qui m'a fait réſoudre à expliquer préſentement une maniére aſſez facile de décrire & d'appliquer la ligne Parabolique aux Colonnes, afin que l'on en puiſſe faire l'expérience, & la mettre deſormais en uſage, ſi elle ſatisfait aux yeux de ceux qui s'y connoiſſent.

Fig. III. de la II. Planche. Pour l'appliquer il y faut proceder en cette façon. La ligne AB soit la longueur de toute la Colonne, CD le demidiamétre de sa plus grande grosseur, CG ou BF le demidiamétre de sa moindre grosseur sous le Collet ou Gorgerin, AC le tiers de la Colonne, ou telle autre partie où on voudra que la diminution commence. Aprés quoy la ligne CD doit estre continuée en N, en sorte que DN soit égale à DG ou EF; & sur la ligne CN, comme diamétre on décrit le demicercle NOC, qui coupe la ligne DE en O, & l'on fait DH, égale à DO, laquelle sera par conséquent moyenne proportionelle entre CD & DG; puis il faut méner HI parallele à AB, qui soit coupée en I par la ligne DI, tirée du point D par le point F, & l'on fait les lignes CK & CM égales à HI. Enfin du point D comme sommet, sur l'axe DC & sur l'amplitude MK, on décrit la ligne Parabolique MLDFK laquelle passera nécessairement par le point F, & laissera de part & d'autre la ligne, LDF pour la diminution que l'on demande.

La démonstration en est aisée, parce que la ligne HD estant moyenne proportionnelle entre les deux CD & DG, il s'ensuit que le quarré de HD sera au quarré de DG, comme la ligne CD est à la ligne DG; mais le quarré de DH est au quarré de GD, comme le quarré de HI ou CK est au quarré de GF; donc le quarré de l'ordonnée CK sera au quarré de l'ordonnée GF, comme la portion de l'axe CD est à la portion GD. Et partant le point F sera dans la Parabole dont l'axe sera CD, le sommet D, & l'ordonnée CK, c'est à dire, l'amplitude MK.

Je ne grossirai point ce discours de toutes les différentes maniéres dont on se sert pour décrire les Paraboles, soit par le moyen de plusieurs points trouvez, ou tout d'un trait, par des instrumens qui se trouvent aisément dans les Livres. J'avertirai seulement les Ouvriers que Galilée leur en enseigne une dans ses Méchaniques, que j'estime facile & ingénieuse, & que j'ay fait heureusement pratiquer par les Charpentiers du Roy, en la fabrique

brique des Vaisseaux & Galéres, pour ce qu'il appellent leur donner beau Galbe à la Pouppe.

Elle est telle, qu'il ne faut que faire la description cy-dessus, au plan d'un mur qui soit à plomb, en sorte que la ligne MK soit de niveau, & attacher deux clous aux deux repaires K & M qui terminent l'amplitude de la Parabole, sur lesquels il faut laisser librement pendre une fiscelle ou chaisnette, jusqu'à ce que de son milieu elle vienne à toucher le point D, c'est à dire, le sommet de la Parabole, afin qu'elle la marque dans toute son étenduë; en sorte que si cette cordelette est fortée de crayon ou sanguine, & qu'on la fasse toucher doucement au mur sans la changer de situation ni la varier, la ligne Parabolique se trouve désignée sur le plan du mur, laquelle passera nécessairement par le point. F.

I I.

Pour l'Ellipse.

QUE si l'on veut éprouver quel effet peut faire la ligne Elliptique, il faut (dans la 3. Figure de la 1. Planche) décrire un demi-cercle sur tout le diamétre de la plus grande grosseur de la Colonne KD, lequel coupe GF en H, & abbaisser la ligne HI paralléle à DK; puis tirer la ligne ID, à laquelle du point B il faut mener une paralléle BO qui rencontre la ligne KD continuée en O, & faire les quatre lignes GN & CM, DP & DQ égales à la ligne CO; & par ce moyen l'on aura les deux Axes de l'Ellipse MN & KD, laquelle passera nécessairement par le point F; & les deux points Q & P en seront les foyers, qui sont appellez Singliots par les Ouvriers, & par le moyen desquels l'Ellipse ou ovale peut estre facilement décrite. *Fig. III. de la I. Planche.*

La démonstration en est telle, parce que BO est paralléle à ID; la ligne CO sera à CB, c'est dire, CN à GF, comme

CD

CD eſt à CI ou GH; & le quarré de l'ordonnée CN au quarré de l'ordonnée GF, comme le quarré de CD eſt au quarré de GH, c'eſt à dire, comme le rectangle KCD eſt au rectangle KGD; & partant le point F ſera dans l'Ellipſe dont MN & DK ſeront les Axes. Le reſte au ſujet de foyers Q & P, ſe voit clairement par la 52. du 3. des Coniques d'Apollonius.

III.

Pour le Cercle.

Fig. IV. de la II. Planche.

PEUT-ESTRE que la ligne Circulaire meſme tombera dans le gouſt de quelques-uns. Elle ſe peut appliquer en cette maniére. Il faut (dans la 4. Figure de la 2. Planche) mener la ligne droite DF, ſur laquelle au point H, où elle eſt partagée en deux également, il faut tirer une perpendiculaire HI, laquelle rencontre la ligne DC continüée en I, où ſera le centre du Cercle, qui ayant ID pour rayon, paſſera auſſi par le point F.

Mais comme ce centre I peut ſe trouver tellement éloigné, que la pratique de la deſcription du Cercle en deviendroit difficile, ou meſme impoſſible; l'on peut ſe ſervir de deux régles, comme DO & DN de grandeur indéterminée, & attachées en D, en ſorte qu'elles contiennent l'angle FDM; & mettant deux repaires fermes aux deux points F & M, que je ſuppoſe également diſtans du point G; il faut faire marcher le ſommet de l'angle D depuis L juſqu'en F, en ſorte que la régle DN touche toûjours le point M, & la régle DO le point F; & par ce moyen le point D décrira par ſon paſſage la ligne Circulaire LDF que l'on demande.

IV.

Pour l'Hyperbole.

Fig. IV. de la I. Planche.

ET ſi l'on veut ſçavoir ſi l'Hyperbole y eſt utile, il faut (dans la 4. Figure de la 1. Planche) continüer indéfiniment la ligne

ligne CD, & prendre les deux DI & IK égales à DC, en ſorte que DK ſoit égale au plus grand diamétre de la Colonne; puis ſur les deux lignes DK & GI comme diamétres, il faut décrire deux demicercles s'entrecoupans au point H, & du point G tirer la ligne GH, & la continüer en R, en ſorte que GR ſoit égale à GF; puis du point R, il faut méner RL parallèle à HI, c'eſt à dire, perpendiculaire à GR, & qui rencontre la ligne GK continuée en L. Enſuite on prend la ligne DM égale à RL, & ayant tiré la ligne IM, on fait de part & d'autre du point I ſur la ligne CK continüée, les lignes IO & IP égales à IM. Et par ce moyen ſont trouvez les foyers ou Singliots O & P de l'Hyperbole, dont l'Axe tranſverſe eſt DK, ſon Axe conjugué TS double de la ligne DM, le centre I, le ſommet D, où elle touchera la ligne DE, & paſſera par le point F.

Voicy comme je le démontre, parce que l'angle IHG eſt droit dans le demicercle IHG, & la ligne HI demidiamétre du Cercle DHK; la ligne GH touchera le ſuſdit cercle au point H, & partant le rectangle KGD ſera égal au quarré GH, & le rectangle KGD ſera au quarré de l'ordonnée GF, comme le quarré GH au meſme quarré GF, ou de ſon égale GR, c'eſt à dire, comme le quarré HI, au de ſon égale DI, au quarré RL, ou de ſon égale IS; c'eſt à dire, en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diamétre KD au quarré du diamétre TS. Et partant le point F ſera dans l'Hyperbole, dont les deux Axes ſeront DK & TS, le centre I, & le ſommet D. Maintenant parce que DM eſt égale à IS, le quarré IM ou IO ſera égal aux quarrez ID & IS; mais le quarré IO eſt auſſi égal au quarré ID, & au rectangle KOD; donc le rectangle KOD eſt égal au quarré IS, c'eſt à dire, au quart de la Figure, & excédant d'un quarré, dont le coſté eſt la ligne DO; & par conſéquent le point O & le point P qui eſt également diſtant du centre I, ſeront les foyers de l'Hyperbole ſuſdite : ce qu'il falloit démontrer.

Il y a mille moyens de décrire les Hyperboles, quand on a trouvé ses Axes & ses foyers; & le plus aisé pour les Ouvriers est celuy de M. des Cartes qui se pratique ainsi: On prend une grande régle, comme PQ, que l'on attache par un bout au Singliot P, sur lequel elle tourne, & par l'autre bout Q à une fiscelle QFO, qui doit estre plus courte que la régle de toute la longueur de la ligne DK; l'autre extrémité de la corde s'attache à l'autre Singliot O.

Instrument pour la délinéation de l'Hyperbole.

Cela fait, il faut tenir la fiscelle tout prés de la régle, comme si elle y estoit collée, ainsi qu'il se voit dans la Figure, depuis Q jusqu'en F, ou depuis V jusqu'en X; & en tournant la régle sur le pivot P, & tenant toûjours la corde joignant la régle, le point où elles se joindront décrira par ce mouvement l'Hyperbole FXD que l'on demande, laquelle pourra estre continüée de l'autre costé, en changeant la régle de face.

CINQUIEME DISCOURS.

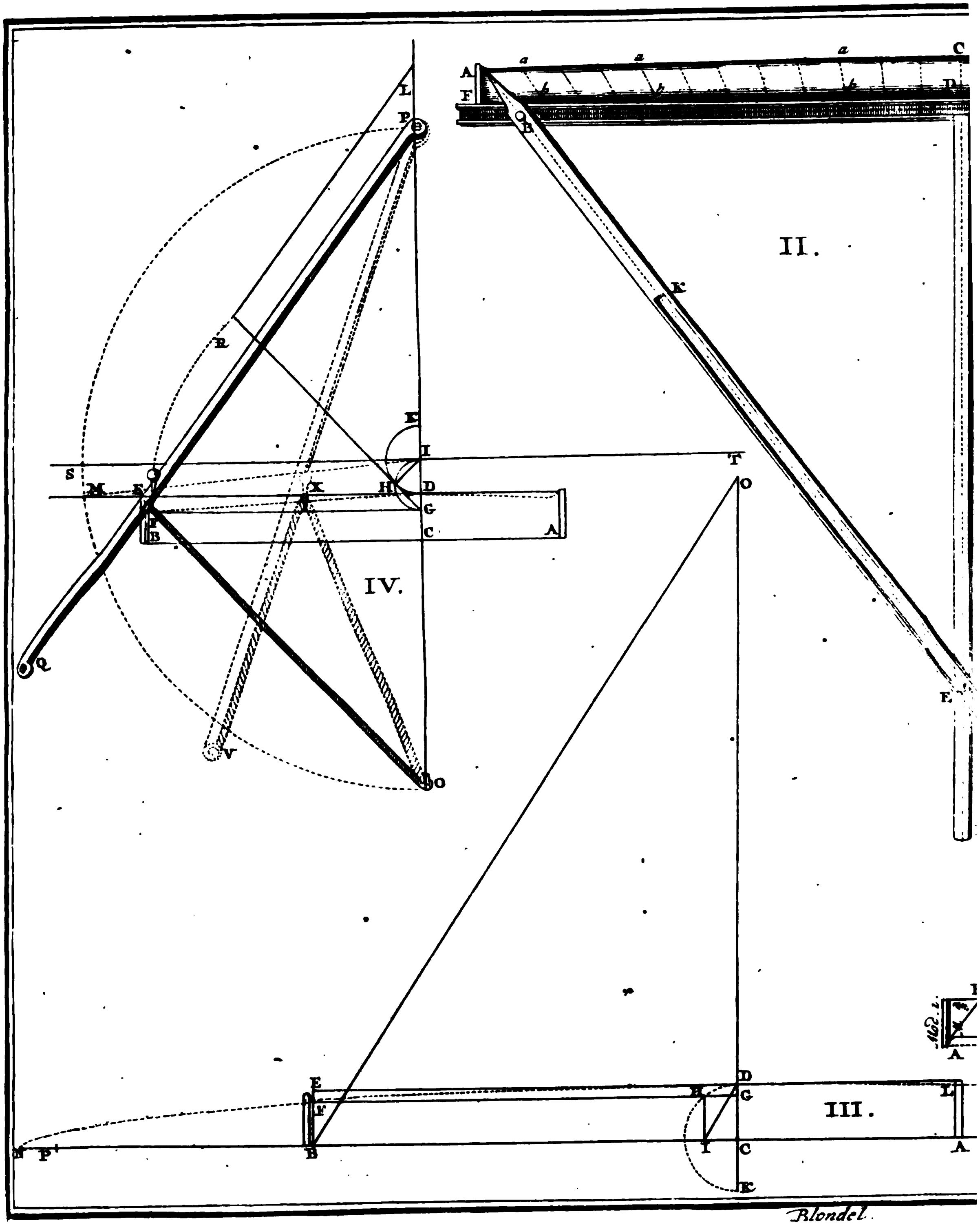
DETERMINATION DES MANIERES

infinies d'appliquer les Sections Coniques au Trait de la diminution des Colonnes.

Il faut icy remarquer que bien que je n'aye parlé cy-dessus que d'une seule maniére d'Ellipse & d'Hyperbole, sçavoir de celle où l'Axe transverse de l'une & de l'autre est égal au plus grand diamétre de la Colonne; il y a pourtant un nombre infini d'autres espéces de l'une & de l'autre qui peuvent estre décrites, & servir utilement à la diminution des Colonnes, & de sorte qu'elles touchent la ligne DE en D, & passent par le point F. Ce que j'explique en cette maniére.

Fig. I. de la III. Planche.

Aux deux lignes DG & GF (dans la 1. Figure de la 3. Planche)



Blondel.

che) soit faite une troisiéme proportionnelle GH; & du point H soient menées des lignes de tous costez, comme HD, HL, H δ, HM, &c. en lesquelles coupent la ligne DE continüée en D, Q, P, I, O, &c. en sorte qu'elles rencontrent diversement la ligne DG continüée indéfiniment: C'est à sçavoir que HD la coupe au point D, HL au dessus du susdit point D, H δ luy soit paralléle, HM la coupe en M au dessous du point G, & HN en N, en sorte que GN soit égale à GD, & enfin H λ au point λ, en sorte que G λ soit moindre GD; ensuite de tous les points de la ligne GD, compris entre G & D, soient entenduës estre menées des lignes paralléles à GH, & qui soient moyennes proportionnelles entre les portions de la susdite ligne GD, comprises respectivement entre le sommet D & lesdites paralléles, & les portions desdites paralléles contenuës entre ladite DG & les lignes tirées du point H. Ces choses ainsi supposées.

Je dis que toutes ces moyennes proportionnelles seront les ordonnées des lignes reguliéres, dont l'Axe sera GD, le sommet D, où la pluspart touchera la ligne DE, & passeront par le point F, suivant cét ordre.

I.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de l'Axe DG, & les portions des paralléles coupées par la ligne HD, comme AZ moyenne entre AD & AS, seront *les ordonnées à une ligne droite DZF.*

I I.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les paralléles coupées par la ligne HL comme AT moyenne entre AD, & AB, *seront dans l'Hyperbole DTF*, dont DL sera l'Axe transverse, & DQ le droit. Où il paroist que ce sera

 l'Hy-

l'Hyperbole que nous avons décrit cy-dessus, si la ligne DL est égale au plus grand diamétre de la Colonne, & GF égale aux deux tiers de sa longueur.

III.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les parallèles coupées par la ligne H δ, comme AV moyenne entre AD & AC, *seront les ordonnées à la Parabole DVF*, qui est celle que nous avons expliquée cy-dessus, & dont GD sera l'Axe, & GH ou DP le diamétre droit ou contigu.

IV.

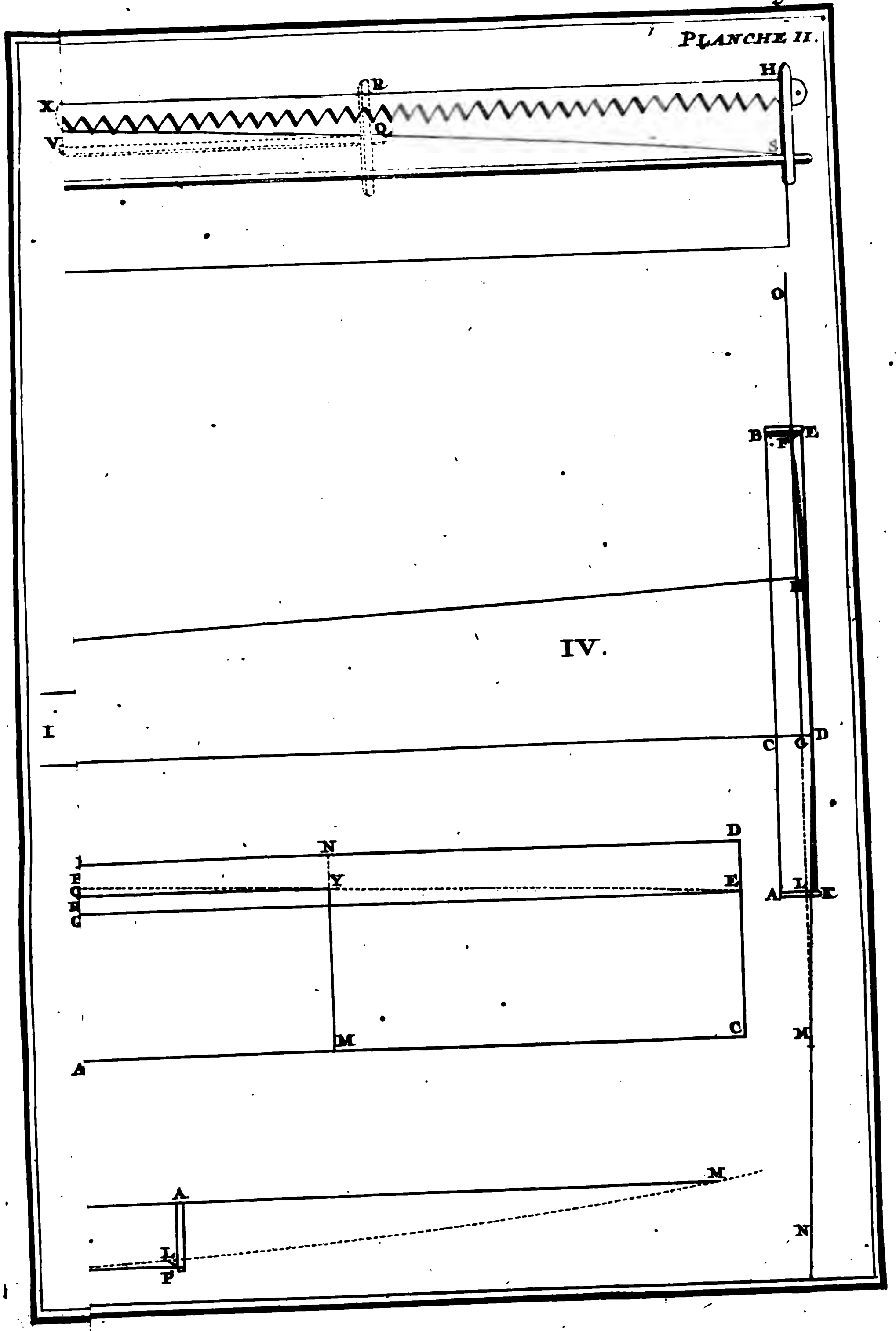
Les moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les parallèles coupées par la ligne HM, comme AX moyenne entre AD & AK, *seront les ordonnées à une Ellipse DXF*, dont l'Axe transverse est DM, & son droit ou contigu est DI. Où il se voit qu'elles seront au cercle que nous avons décrit au précédent discours, si les lignes GH & MG sont égales, & qu'elles seront dans l'Ellipse que nous avons expliquée au mesme endroit, si la ligne DM est égale au plus grand diamétre de la Colonne.

V.

Les moyennes proportionelles entre les parties de GD & les parallèles coupées par la ligne HN, comme AY moyenne entre AD & AR *sont aussi dans une Ellipse DYF*, dont l'Axe transverse est DN, & le droit DO. Où il faut remarquer que GN ayant esté faite égale à GD dans cette hypothése, la ligne GF sera la moitié de l'Axe de mesme conjugaison avec DN, & partant cette Ellipse est la derniére de celles qui peuvent servir aux

Co-

PLANCHE II.



Colonnes, parce que toutes les autres, dont les Axes transverses sont moindres que DN, ont quelques ordonnées au susdit Axe & au dessus du point G qui sont plus longues que GF, & qui font par conséquent passer la courbe de l'Ellipse au-de-là de la ligne EF, comme il se voit en l'hypothése qui suit.

VI.

Les moyennes proportionnelles entre les parties de GD, & les paralleles coupées par la ligne Hλ, comme Aϱ moyenne entre AD & Aμ, *sont ordonnées à une Ellipse DϱF*, dont l'Axe transverse est Dλ, & le droit Dν; où il se voit que si le point A est plus prés du point milieu de la ligne Dλ que le point G, la ligne Aϱ sera plus longue que GF; & par conséquent le point ϱ de l'Ellipse passera au-de-là de la ligne EF en ϱ, d'où elle retournera en F, aprés avoir fait une Courbûre en dehors: ce qui ne peut pas servir aux Colonnes.

VII.

Enfin, si la ligne du point H coupe DG entre D & G comme en π; il arrivera 1. Que toutes les moyennes proportionnelles entre les parties de π D & les parallèles tirées entre les points π & D, & coupées par la ligne Hπ continüée en τ, comme Aβ moyenne entre AD & Aξ, *seront ordonnées à un Cercle* Dβπ si les lignes π D, τD sont égales, *ou à une Ellipse*, si elles sont inégales, dont l'Axe transverse sera πD & le droit τD.

2. Et toutes les moyennes entre les parties de GD & les parallèles tirées de tous les points de la ligne Gπ, & coupées par la ligne Hπ, comme ψχ moyenne entre ψD & ψφ, *seront ordonnés à une Hyperbole* πχF, qui touchera la susdite Ellipse au point π, & aura mesmes Axes qu'elle, sçavoir π D pour transverse, & Dτ pour droit.

En quoy il se voit encore que ny l'une ny l'autre de ces deux lignes ne peuvent avoir aucune utilité pour les Colonnes, parce que l'Ellipse ne passe point par F, & l'hyperbole ne touche point la ligne DE en D, qui sont conditions nécessaires pour lesdites Colonnes.

Maintenant, comme on peut tirer une infinité de lignes du point H entre les deux lignes HG & H δ qui couperont la ligne GD en quelque point au dessus de D, lequel terminera l'Axe transverse *d'une Hyperbole utile aux Colonnes*; & comme on peut tirer une autre infinité de lignes du mesme point H, qui couperont la mesme GD au dessous du point N en quelque point qui terminera l'Axe transverse *d'une Ellipse aussi utile aux Colonnes.*

De plus, comme les unes & les autres desdites lignes sont reguliéres, uniformes, & qui se peuvent décrire par une infinité de maniéres différentes, aussi-bien que par celles que nous avons cy-dessus expliquées, & qui (à la reserve de celles dont les Axes transverses sont coupez par les lignes tirées du point H entre les points D & N) touchent toutes la ligne DE en D, & passent par le point F.

Il s'ensuit que l'on peut utilement décrire une infinité de ces lignes pour le trait de la diminution des Colonnes, entre lesquelles la Parabole sera la moyenne, sous laquelle passeront les Hyperboles dans l'espace contenu entre la Parabole & la ligne droite DF, & toutes les Ellipses passeront au dessus, c'est à dire, dans l'espace compris entre la Parabole & la droite DE.

Et quoy qu'entre ces lignes j'aye seulement choisi pour éxemple celles dont l'Axe transverse estoit égal au plus grand diamétre de la Colonne, ce n'a pas esté pour estre plus aisées, ou plus utiles que les autres, mais seulement parce que cette grandeur s'est trouvée ainsi déterminée.

De toutes ces choses, on peut juger si je n'ay pas eû raison de souhaiter au premier Discours de ce Probléme, que l'Auteur *du*

Para-

Paradoxe proposé à résoudre à tous les Architectes, se fust un peu plus clairement fait entendre de la nature de la ligne, que l'on peut, comme il dit, décrire *Architectoniquement parfaitement* pour le renflément & diminution des Colonnes; puis qu'aprés que quelqu'un en aura décrit *Architectoniquement parfaitement* une infinité par les maniéres cy-dessus dites; il dépendra toûjours de la volonté de l'Auteur *du Paradoxe* de s'en réserver une infinité d'autres, & dire qu'on n'aura pas encore trouvé la sienne.

Outre que cette mesme infinité de lignes qui se trouve dans ces trois sections de Cone, que M. des Cartes appelle lignes du premier Genre, dont les Equations ne montent qu'aux quarrez, se rencontre de mesme dans toutes les lignes des Genres plus élevez, lesquels estant d'ailleurs infinis, produisent encore une infinité d'infinité de lignes réguliéres; uniformes, que l'on peut décrire *Architectoniquement parfaitement*, & qui sont propres à résoudre *le Paradoxe* proposé.

Sans parler d'une autre infinité de lignes, qui ne sont pas comprisez sous ces Genres, comme de la Roulette, Ovales de M. des Cartes, Spirales, Cyssoïdes, Conchoïdes, Quadratices, &c. lesquelles sont aussi lignes uniformes & réguliéres, & qui par conséquent peuvent faire effet dans cette description.

RE-

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

SECOND PROBLEME RESOLU.

L'Apollonius François des Tactions, ou décrire Géométriquement les Arcs rampans sur toutes sortes de pieds droits & de hauteur.

PREMIER DISCOURS.

IL y a deux choses qui méritent d'estre considerées au sujet des Arcs rampans, qui sont ordinairement mis en pratique sur des ouvertures & hauteurs données ou non données ; l'une regarde la maniére de les décrire, & qui fait le sujet du present Probléme ; l'autre traite du moyen de tirer leurs joints de teste, qui est expliqué dans le Probléme suivant.

Premiére Observation.

SUR la maniére de décrire les Arcs rampans, je me suis souvent étonné que la pratique que Pappus enseigne dans le 8. de ses Collect. Mathem. de trouver les Axes d'une Ellipse, dont les dia-

diamétres de meſme conjugaiſon ſont donnez, ne fuſt pas en uſage parmi les Ouvriers pour la deſcription de ces Arcs, veû qu'elle y eſt ſi utile & ſi aiſée.

Et aprés avoir médité ſur les cauſes qui peuvent l'avoir juſqu'icy fait négliger, j'en ay trouvé deux aſſez apparentes. La premiére eſt, qu'il ne paroiſt pas facilement qu'il y ait aucun rapport entre la propoſition de Pappus, & la deſcription de ces Arcs rampans, parce qu'il faut une préparation aſſez difficile ſur les lignes données, que l'Ellipſe ou l'Arc propoſé doit toucher en certains points, afin de trouver ſes diamétres de meſme conjugaiſon, auparavant que l'on y puiſſe appliquer ce Probléme de Pappus. L'autre raiſon eſt, que ce Probléme dans l'Auteur n'eſt expliqué que Méchaniquement, quoy que ſa réſolution ſoit purement Géometrique, & n'ayant eſté démontré ny par Pappus, ny meſme par Commandin qui l'a commenté, on a deû juſqu'icy douter de ſa verité; & l'appréhenſion que l'on a eûë de travailler ſur une fauſſe ſuppoſition, a pû eſtre en partie la cauſe qu'on ne s'y ſoit pas étudié.

Pour ſatisfaire à l'une & à l'autre de ces raiſons, j'ay travaillé à donner une deſcription aiſée de ce qu'il faut faire pour cette préparation, c'eſt à dire, pour trouver les diamétres de meſme conjugaiſon d'une Ellipſe, ou autre ſection qui doive toucher certaines lignes données en certains points dans tous les cas qui ſe peuvent propoſer; (ce qui peut en Géometrie porter le nom d'Apollonius des Tactions.) Et aprés y avoir joint des Pratiques entiéres & démontrées, j'ay auſſi voulu faire connoiſtre, que l'on pouvoit ſe ſervir aſſeûrément de la régle de Pappus, de laquelle j'ay fait une Démonſtration purement Géometrique, afin que les Ouvriers la puiſſent doreſnavant mettre en uſage au lieu de celles qu'ils emploient, qui ſont ou fautives & défectueuſes, ou trop embarraſſées.

Seconde Observation.

On peut donc construire les Arcs rampans par des Ovales qui sont faites par l'attouchement de certaines portions de Cercles, ou par le moyen des Sections Coniques, ou mesme par une infinité d'autres lignes de divers genres. Je ne diray rien de la premiére maniére, parce qu'elle a esté curieusement recherchée & heureusement décrite par le sieur Bosse dans ses derniers Ouvrages d'Architecture. La troisiéme façon de les décrire par des lignes d'un autre genre que les Sections Coniques est si vaste, ou pour mieux dire si embarrassée, qu'elle ne peut pas avoir grand usage dans la pratique.

Ce sera donc la seconde qui se sert des Sections Coniques que j'expliqueray dans ce Discours, & particuliérement ce qui regarde les constructions de l'Ellipse comme de la Section, dont l'usage est plus fréquent que des autres en cette matiére.

Mais avant que de passer plus outre, il n'est pas hors de propos d'enseigner une chose, qui tombe très-souvent en usage quand on traitte des Sections Coniques, & dont la connoissance abrègegera de beaucoup les pratiques que nous déduirons cy-aprés. C'est ce Probléme.

Trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données.

Figure II. de la III. Planche. Les deux lignes soient AB & C (dans la 2. Figure de la 3. Planche), & de la plus grande AB soit retranchée la partie BD égale à C, & le reste AD divisé en deux également en E. Ensuite sur les deux lignes AD & EB comme diamétres, il faut faire les deux demicercles AGD, EGB se coupans en G, d'ou il faut méner les droites GB, GE, & abaisser GF perpendiculaire à AB. Je dis que la ligne BF sera celle que l'on cherche, & moyenne

enne proportionnelle Harmonique entre les deux droites données A B & C; parce que l'angle E G B au demicercle estant droit, aussi-bien que les angles au point F, la ligne B E sera à E G, comme E G est à E F; c'est à dire, que E G ou E D sera moyenne Géométrique entre les deux E B & E F; & partant par conversion de raison, doublant les antécédens, & divisant, la ligne A F sera à la ligne F D comme A B est à B D; c'est à dire, que comme la premiére A B est à la troisiéme B D, ainsi A F, qui est l'excés de la premiére A B sur la seconde B F, est à F D, qui est l'excés de la seconde B F sur la troisiéme B D. Et par conséquent les trois lignes A B, F B, D B sont en continüelle proportion Harmonique, & la ligne B F est moyenne Harmonique entre les deux extrémes A B & B D ou C. Ce qu'il falloit faire.

Il paroist de plus, que le quarré de la Touchante B G estant égal au rectangle des mesmes extrêmes A B & B D, la mesme B G sera moyenne Géométrique entre ces lignes. Et parce que la ligne A B surpasse E B du mesme excés que la ligne E B surpasse D B, il s'ensuit que cette ligne E B est la moyenne Arithmétique entre les mesmes extrêmes A B & B D ou C. voilà donc entre deux extrêmes données A B & C, trois moyennes trouvées, sçavoir l'Arithmétique B E, la Géometrique B G, & l'Harmonique B F.

Or comme dans le Triangle E B G, la ligne E B est à B G comme B G est à B F; il s'ensuit que la mesme B G est aussi moyenne proportionnelle Géometrique entre les deux E B & B F. Et partant que *la moyenne Géometrique entre deux lignes extrêmes, est aussi moyenne Géometrique entre les deux moyennes Arithmétique & Harmonique des mesmes extrêmes*. Ce qu'il faut remarquer.

Troisiéme Observation.

Sur ce propos il y a deux choses que je ne sçaurois dissimuler. La premiére est l'étonnement que j'ay eû, qu'encore que l'on ait

écrit de si belles choses des Sections Coniques, & qu'entre les propriétez de leurs Contingentes, celle-cy ait esté reconnuë pour une des principales & plus fréquentes, puis qu'il arrive en mille façons qu'une ligne s'y trouve divisée comme AB l'est en F & en D; de sorte que la Toute AB soit à sa Partie DB comme AF est à FD. Et quoy que les plus grands Géomètres aient particuliérement recherché les admirables effets de cette espéce de proportion, je n'ay pourtant veû jusqu'icy personne qui se soit avisé de l'appeller *Harmonique*. Il y en a quelques-uns qui l'ont appellée *Involution*; d'autres ont dit que c'estoit *une moyenne & extrême raison proportionnelle*; mais pas un, au moins que je sçache, ny des Anciens ny des Modernes, ne luy ont donné son veritable nom.

M. Dezargues P. Greg. à S. Vincent.

Quatriéme Observation.

Sur les Erreurs de Pappus pour l'inscription de trois médiétez au demicercle.

La seconde des choses que je ne sçaurois dissimuler au sujet des proportionnalitez, c'est que Pappus ayant proposé la question que j'ay expliquée cy-dessus sous le nom du second Probléme dans le 3. Livre de ses Collections Mathématiques de *trouver*, ainsi qu'il dit, *trois médiétez dans un demicercle*, il semble qu'il n'ait pas trop bien entendu luy-mesme la nature de la proposition, en laquelle il a fait, à mon sens, deux fautes considérables. La première est, d'avoir repris assez légérement la solution qu'un autre en avoit faite avant luy, quoy qu'elle fust légitime. La seconde est, de l'avoir luy-mesme mal résoluë.

L'une & l'autre se reconnoistra par son discours & dans ses Figures. La question commence par ce titre. *Le second Probléme estoit tel.*

Pro-

Prendre trois médiétez dans le demicercle.

UN *autre*, dit-il, *l'a expliqué en cette maniére, & exposant un demicercle ABC* (dans la 3. Figure de la 3. Planche) *dont le centre est E, & prenant dans la droite AC quelque point comme D, & élevant la perpendiculaire DB, il a méné la ligne EB, sur laquelle ayant tiré du point D la perpendiculaire DF, il s'est contenté d'affirmer simplement qu'il avoit exposé trois médiétez dans le demicercle, sçavoir EC moyenne Arithmétique, DB Géometrique, & BF Harmonique. Or il est constant que BD est la moyenne en proportion Géometrique entre les deux AD & DC; & que EC est moyenne Arithmétique entre les deux mesmes extrêmes AD & DC: parce que AD est à DB comme DB est à DC; & comme AD est à elle-mesme, ainsi l'excés des deux AD, AE, c'est à dire, AD EC est à l'excés des deux EC & CD. Mais il n'a point dit en quelle sorte BF fust moyenne en médiété Harmonique, ny de quelles lignes droites, c'est à dire, entre quelles extrêmes; mais il a seulement asseûré qu'elle estoit la troisiéme proportionnelle aux deux EB & BD, ne sçachant pas que des trois lignes EB, BD, BF, qui sont en proportion Géometrique, il se forme une médiété Harmonique: car nous montrerons cy-dessous que deux EB, trois DB & BF ajoûtées ensemble, font le plus grand terme d'une médiété Harmonique, de laquelle deux BD & BF font le moyen, & BD & BF le moindre.* *Fig. III. de la III. Planche.*

Voilà tout le discours de Pappus que j'ay traduit du Latin de Commandin, dans lequel il paroist que Pappus n'a pas connu que la ligne BF fust la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes AD & DC, entre lesquelles les deux EC ou EB & DB sont aussi respectivement moyennes Arithmétique & Géometrique; parce qu'il ne s'est pas souvenu de ce que nous avons fait remarquer cy-dessus, que *la moyenne Géometrique entre deux extrêmes estoit aussi moyenne Géometrique entre les moyennes Arithmétique & Harmonique des mesmes extrêmes*; n'estant pas possible

 qu'il

qu'il n'euſt veû, ſi la penſée luy en eſtoit venuë, que la ligne B D eſtant moyenne Géometrique entre les deux extrêmes A D & D C, & entre les deux lignes E B & B F, dont E B eſt moyenne Arithmétique entre les meſmes extrêmes A D & D C, la ligne B F ne deuſt eſtre auſſi la moyenne Harmonique entre les meſmes.

Fig. IV. de la III. Planche. Ce qui ſe pourroit encore démontrer d'une autre maniére, en prenant (dans la 4. Figure de la 3. Planche) la ligne E G égale à D C, & ménant la ligne D K qui touche le Cercle A K H fait du centre G & intervalle A G, & la ligne K I, perpenduculaires à A C & G K, parce que la toute A E eſtant égale à la toute E C, & l'oſtée G E égale à l'oſtée D C, le reſte A G ou G H ſera égal au reſte E D; & oſtant le commun E H, la ligne E G ou C D ſera égale à D H; & comme A D à D C, ainſi A D à D H; mais la raiſon de A D à D C eſt double de celle de A D à D B, & la raiſon de A D à D H double de celle de A D à D K; Donc la raiſon de A D à D B ſera égale à celle de A D à D K; & partant la ligne D K ſera égale à D B. Maintenant ſi aux lignes égales G H & E D on ajouſte les égales H D & D C, les toutes G D & E C ou E B ſeront égales; & partant G D ſera à D K comme E B à B D; mais comme G D eſt à D K, ainſi D K eſt à D I; comme E B eſt à B D, ainſi B D eſt à B F; Donc D K ſera â D I, comme D B eſt à B F; & partant la ligne D I ſera égale à la ligne B F. De plus, la ligne D K touchant le cercle, & K I eſtant perpendiculaire à A D, il s'enſuit que A D premiére eſt à D H troiſiéme, comme A I différence de la premiére A D & ſeconde D I eſt à I H différence de la ſeconde I D & troiſiéme H D c'eſt à dire, que la ligne D I eſt moyenne Harmonique entre les deux extrêmes A D & D H ou D C. Et partant que la ligne B F égale à D I eſt auſſi moyenne proportionnelle entre les deux A D & D C, dont D B eſt la moyenne Géometrique, & E B ou E C l'Arithmétique.

Il paroiſt donc que le Probléme de Pappus a eſté parfaitement reſo-

resolu par les trois lignes EC, BD, BF, qui sont moyennes Arithmétique, Géometrique & Harmonique en un demicercle ABC, & entre mesmes extrêmes AD & DC.

Et pour ce qu'il dit ensuite, que des trois lignes en proportion Géometrique EB, BD, BF ajoustées l'une à l'autre en certaine maniére, il s'en forme une médiété Harmonique : Quoy que cela soit vray, & d'une analogie, (comme il dit) ingénieuse, ainsi que nous l'avons expliqué dans un autre discours ; cela n'a point de rapport à la question présente, parce que cette médiété produite donne d'autres termes & d'autres proportions que celles qui sont proposées..

L'autre défaut se reconnoistra dans la 16. Prop. du mesme Livre, où il propose luy-mesme à résoudre le Probléme cy-dessus, qu'il prétend avoir esté mal résolu par d'autres. Il dit donc ainsi.

Faire trois médiétez dans le demicercle.

TOUT *ce que nous avons dit cy-dessus* (dit-il) *de trois médiétez, est selon l'opinion des Anciens ; mais nous montrerons maintenant qu'il est possible de faire aussi en six lignes droites & les plus petites, trois médiétez dans le demicercle.*

Que l'on expose (dans la 5. Figure de la 3. Planche) *un demicercle, dans lequel BD soit perpendiculaire, EB demidiamétre, sur qui DF soit aussi à angles droits ; & par B soit ménée GBH qui touche le cercle ; & aprés avoir continüé AC en G, soit faite BG égale à BH, & tiré la ligne DKH. Je dis que EK est moyenne en médiété Harmonique, dont BE est la plus grande, & EF la moindre, parce que les angles aux points B & F estans droits, &c...... Or nous avons démontré que les droites AD, EC, DC faisoient une médiété Arithmétique, & que les droites EG, EC, ED, faisoient une autre médiété Géometrique. Nous avons donc fait trois médiétez dans le demicercle.* *Fig. V. de la III. Planche.*

Dans

Dans tout ce discours de Pappus je ne vois pas bien ce qu'il entend par ces mots, de *faire au demicercle trois médiétez en six lignes les plus petites*; car quoy que les trois lignes BE, EK, EF fassent une médiété Harmonique, que les trois AD, EC, DC une Arithmétique, & les trois EG, EC, ED une Géometrique; elles sont néanmoins plus de six lignes différentes, & elles ne sont pas toutes dans le demicercle, hors duquel s'étend la ligne EG. De plus, il ne peut pas entendre par ces six lignes trois couples d'extrêmes comme AD, DC: BE, EF: & EG, ED: entre lesquelles il faille trouver trois moyennes dans le demicercle, tant parce que pas une de ces extrêmes n'est déterminée, & qu'elles ne se trouvent non plus que les moyennes que par la construction, que parce que, comme nous venons de dire, il y a une de ces extrêmes, sçavoir EG, qui tombe hors du demicercle.

Le Probléme seroit élégant, si ayant proposé trois couples de lignes disposées en certaine maniére, comme AD, DC: EG, ED: AG, & une autre, comme AL: il falloit trouver le demidiamétre d'un cercle comme EC, qui fust respectivement moyenne Arithmétique, Géometrique, & Harmonique aux trois couples proposez en la mesme sorte qu'elle l'est Arithmétique & Géometrique aux deux couples AD, DC: & EG, ED: Mais comme elle n'est plus moyenne, mais plus grand terme au troisiéme couple proposé EB, EF: la proposition est défectueuse.

Ou bien à la maniére que les anciens l'ont entendu & résolu, comme il dit, en cinq lignes seulement, sçavoir qu'il fallust trouver dans le demicercle les trois moyennes entre deux extrêmes, comme entre les deux AD, DC, trouver AE moyenne Arithmétique, BD Géometrique, & BF Harmonique, ou entre les deux BE, EF, aprés avoir divisé BF en deux également en I, trouver EI moyenne Arithmétique, ED Géometrique, & EK Harmonique; ou enfin entre les deux AG, GC trouver EG Arithmétique, BG Géometrique, & DG Harmonique. Et ainsi une infinité d'autres.

Et

Et Pappus auroit en cette maniére évité l'obſcurité qui ſe trouve dans ſon Probléme, qui fait douter qu'il l'ait bien entendu luy-meſme, auſſi-bien que ſon Interpréte Commandin.

SECOND DISCOURS.

TROUVER LES DIAMETRES

de meſme conjugaiſon des Sections, ſelon les différentes ſujétions des Arcs à décrire.

Mais pour retourner à noſtre propos, aprés une ſi longue digreſſion, il faut ſe ſouvenir de ce que nous avons enſeigné pour trouver une moyenne Harmonique entre deux lignes données. Et pour commencer aux pratiques de nos Arcs rampans, nous dirons que l'on ſuppoſe un Arc à décrire ſur deux pieds droits à une hauteur déterminée, ou non déterminée; & en l'un & l'autre cas ces deux pieds droits ſont paralleles ou inclinez l'un à l'autre, ſoit en talu ou en ſurplomb. De plus, ſi la hauteur eſt donnée, le plan qui la détermine eſt paralléle au plan de la rampe de l'Arc, ou bien l'un & l'autre eſtant continüez ſe rencontrent.

Il faut donc parler de tous ces cas, & trouver premiérement ſur toutes ces Hypothéſes, deux diamétres de meſme conjugaiſon d'une ſection Conique qui faſſe l'Arc que l'on demande; & en ſuite appliquer à ces diamétres le Probléme de Pappus, ſi c'eſt dans une Ellipſe, ou d'autres pratiques, ſi c'eſt une autre Section, pour en trouver les Axes & les Foyers ou Singliots, par le moyen deſquels la Section propoſée puiſſe eſtre facilement déſignée.

Et pour y travailler avec ordre, nous commencerons premiérement par l'explication de ceux dont la hauteur n'eſt point déterminée, pour paſſer en ſuite aux autres.

PREMIERE OBSERVATION.

Décrire les Arcs, dont la hauteur n'est point déterminée.

PROBLEME PREMIER.

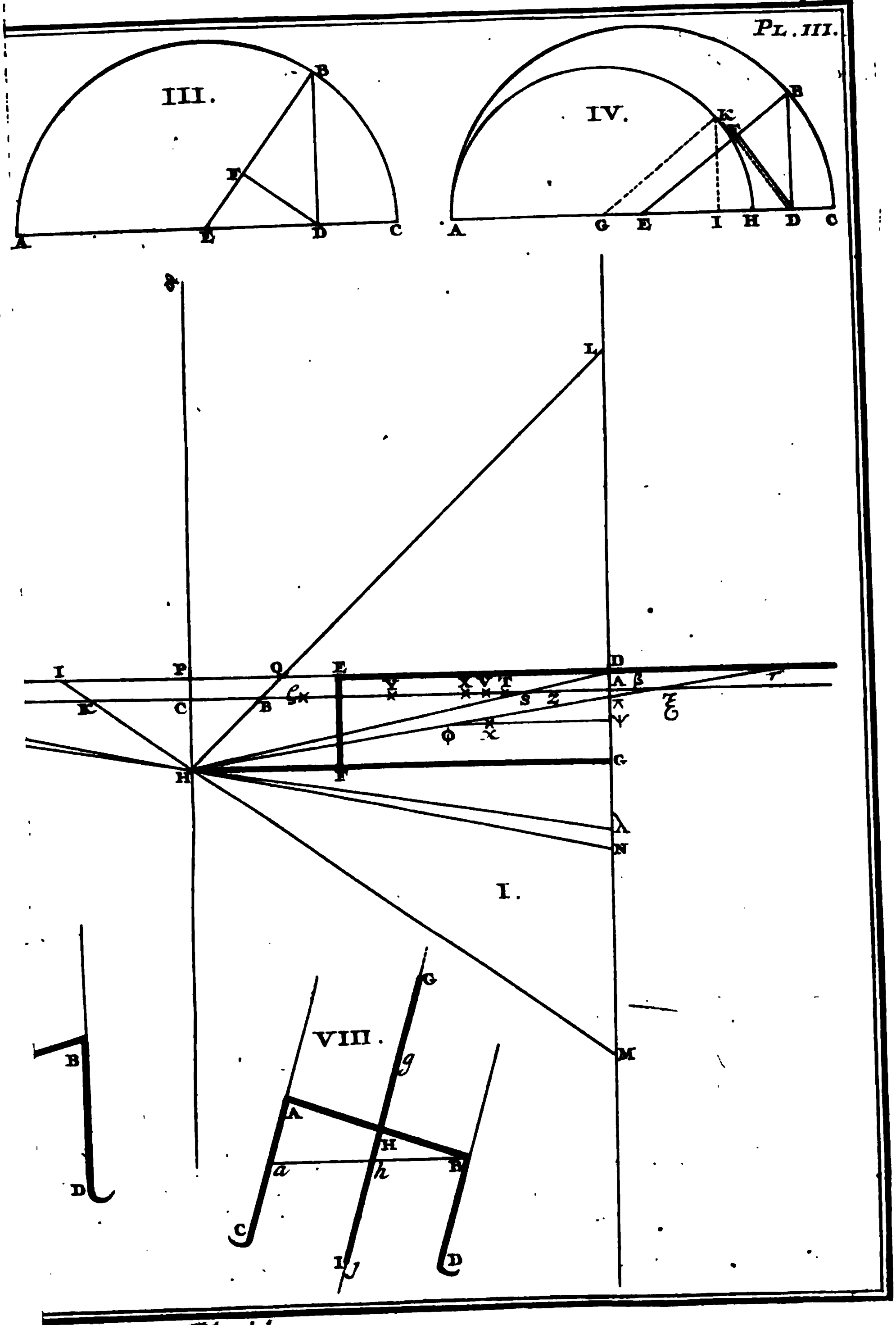
Fig. VI. VII. VIII. de la III. Planche.

Soit donc (dans les 6. 7. & 8. Figures de la 3. Planche) les deux pieds droits A C, B D parellelos, soit qu'ils soient à plomb (comme en la 6. & 7. Figure), ou que l'un soit en talu & l'autre en surplomb (comme en la 8. Figure). La ligne de la rampe A B (qui conjoint les deux points A & B), où l'Arc doit toucher les pieds droits, soit qu'elle soit horizontale (comme en la 6. Figure) ou inclinée à l'horizon (comme en la 7. & 8.) soit divisée en deux également en H, & par H soit ménée I H G parallèle aux pieds droits; je dis que si l'on prend deux lignes égales de part & d'autre du point H sur la ligne I G comme H G & H I à quelque distance qu'on les vueille étendre, les deux lignes A B & I G seront les diamétres d'un cercle, si les lignes A H & H G sont égales, ou les Axes d'une Ellipse, si elles sont inégales, & si la ligne A B est perpendiculaire aux pieds droits (comme en la 6. Figure) ou si elle leur est inclinée (comme aux deux autres Figures) elles seront les diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse, qui passant par les points I & G, & ayant le point H pour centre, touchera les deux pieds droits en A & B. La démonstration en est claire par la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Au reste, en cette Hypothése il n'y a que le cercle au seul cas cy-dessus, ou l'Ellipse en tous les autres, qui puissent résoudre le Probléme, n'estant pas possible de décrire aucune autre Section qui touche deux lignes paralléles.

PRO-

PL. III.



Blondel.

PROBLEME SECOND.

Si les pieds droits A C & B D estans tous deux en talu, (comme en la 1. Figure de la 4. Planche) se rencontrent, estant continüez en G, la ligne de la rampe A B doit estre divisée en deux également en Z; & du point G par Z, il faut méner la ligne G Z Y continüée indéfiniment. De plus, si vous partagez G Z en deux également en E, & qu'entre les deux points E & Z vous en preniez un autre en quelque endroit que ce puisse estre, comme en F; je dis que ce point F determinera le sommet d'une Ellipse, qui touchera les deux pieds droits en A & B. Et que si en prenant la ligne F H égale a F Z, vous faites que comme G H est à H F, ainsi F Z soit à une quatriéme Z Y, le point Y en sera le centre; D'où si vous faites Y N égale à F Y, la toute F N en sera le diamétre. *Fig. I. de la IV. Planche.*

Pour trouver l'autre diamétre de mesme conjugaison, il faut du point Y méner une ligne K Y I paralléle à A B, & qui rencontre en K & I les lignes des pieds droits C A, D B continüées. Puis du point B il faut méner B L paralléle à Z Y, & entre les deux I Y & L Y, trouver la moyenne Géométrique Y O, à laquelle il faut faire Y M égale, afin que la toute M I soit divisée Harmoniquement en L & O; & que par conséquent la ligne M O soit l'autre diamétre de mesme conjugaison avec F N d'une Ellipse, qui passant par les points A & B, y touche les lignes des pieds droits C A & D B.

La démonstration s'en fait en cette sorte; parce que la ligne G H est à H F, comme F Z est à Z Y, en composant, permutant & composant G Y sera à F Y, comme F Y à Z Y; & partant le quarré de F Y sera égal au rectangle G Y Z.

De plus, si du point A sur K I vous tirez A P paralléle à Z Y, il s'ensuivra que les deux B L, A P seront égales, aussi-bien que

F 2 les

les deux Y L, Y P; & parce que les deux Y K & Y I sont aussi égales, aussi-bien que les deux Y M & Y O; il s'ensuivra encore que la ligne Y O estant moyenne Géometrique entre les deux Y I & Y L, son égale Y M sera aussi moyenne Géometrique entre les deux Y K & Y P; & les quarrez égaux des lignes Y O & Y M seront égaux aux rectangles égaux I Y L, K Y P.

Maintenant, le quarré F Y estant égal au rectangle G Y Z, & le quarré Y O au rectangle I Y L, les quarrez seront entre eux comme les rectangles: mais le rectangle G Y Z est au rectangle I Y L en raison composée des lignes G Y à I Y, c'est à dire, B L à L I, & de Y Z ou B L à L Y; donc le quarré F Y sera au quarré Y O en raison composée des lignes B L à I L, & de B L à Y L, c'est à dire, comme le quarré de B L au rectangle I L Y: mais le rectangle I L Y est égal au rectangle M L O, (comme nous le démontrerons cy-dessous.) Et partant le quarré B L sera au rectangle M L O, comme le quarré F Y est au quarré Y O, ou en prenant leurs quadruples, comme le quarré du diamétre F N est au quarré du diamétre M O: mais B L est paralléle au diamétre F N, & partant ordonnée au diamétre M O; donc le point B sera dans l'Ellipse, dont les lignes F N & M O seront diamétres de mesme conjugaison. On démontrera par le mesme raisonnement, que le point A sera dans la mesme Ellipse.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que les lignes C A & D B toucheront cette Ellipse aux susdits points A & B. Ce qui se fait ainsi. Dautant que les trois lignes G Y, F Y, Z Y, sont en continüelle proportion Géometrique, & que Y N est égale à Y F; il s'ensuit, par ce que nous avons dit cy-dessus, que la toute G N est divisée Harmoniquement aux deux point Z & F; & partant par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius, que les deux droites G A & G B touchent l'Ellipse en A & B. Ce qu'il falloit demonstrer.

Maintenant, afin de faire voir, (comme je l'ay promis dans la suite de la démonstration de ce Probléme) que le rectangle I L Y est

eſt égal au rectangle MLO; je diray ainſi. Le quarré YO eſt égal au rectangle IYL, par ce qui a eſté dit cy-deſſus; mais le quarré YO eſt auſſi égal au quarré YL, & au rectangle MLO; & le rectangle IYL auſſi égal au meſme quarré YL, & au rectangle ILY; le quarré YL avec le rectangle MLO ſera égal au meſme quarré YL avec le rectangle YLI; & partant, ſi on oſte le commun quarré YL, le rectangle MLO reſtera égal au rectangle ILY. Ce qu'il falloit montrer.

Pour avoir une entiére détermination de ce Probléme, nous dirons que GY eſtant à FY comme FY à ZY; par converſion de raiſon, & en permutant GY ſera à FY, comme GF eſt à FZ, où il ſe voit que la ligne GY eſtant plus grande que FY, il faut auſſi néceſſairement que la ligne GF ſoit plus grande que FZ; c'eſt à dire, que FZ ſoit moindre que la ligne EZ, qui eſt la moitié de GZ, & que par conſéquent, pour faire en ſorte que le Probléme ſoit poſſible, il faut prendre le point du ſommet F entre les deux E & Z. Où il paroiſt que plus on le prendra éloigné du point Z, plus l'Ellipſe montera & s'agrandira à l'infini, à méſure que le ſommet F s'approchera du point E; comme au contraire, elle diminura, & deviendra plus platte en s'approchant de la ligne de la rampe AB, à méſure que le meſme ſommet F s'approchera du point Z.

Que ſi les lignes AG & BG ſont égales, l'on pourra ſe ſervir d'un cercle pour la ſolution de ce Probléme, dont le centre ſera dans la ligne GZ, au point où elle ſera coupée par les lignes tirées des points A & B perpendiculaires aux lignes AC & BD. Mais en tous les autres cas de cette hypothéſe, il n'y a que la ſeule Ellipſe qui puiſſe ſervir à la ſolution du Probléme, eſtant impoſſible de trouver aucune autre ſection qui touche les deux pieds droits, & dont le ſommet ſe trouve en dehors vers le point N.

PROBLEME TROSIE'ME.

Fig. II. III. IV. de la IV. Planche.

Si les deux pieds droits AC & BD sont tous deux en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Figures de la 4. Planche) & estans continüez, se rencontrent en G, la ligne de la rampe AB doit estre divisée en deux également en Z; & du point G par Z, il faut mener GZ indéfiniment, & partager la ligne GZ en deux également en E. Aprés quoy, il faut sçavoir que cette proposition contient trois cas différens, à chacun desquels il convient une particuliére Section Conique. Car ou l'on prendra le sommet en E, auquel cas la Section qui résout le Probléme est une Parabole (comme en la 2. Figure;) ou bien entre E & Z, auquel cas il faut une Ellipse (comme en la 3. Figure;) ou enfin entre E & G, & alors il faut une Hyperbole pour satisfaire à la question (comme en la 4. Figure.) Il faut donc examiner les susdits cas l'un aprés l'autre.

Premier Cas du troisiéme Probléme.

Fig. II. de la IV. Planche.

Si donc vous prenez le sommet de vostre Section en E, point du milieu entre G & Z (comme en la 2. Figure de la 4. Planche), & qu'aux deux lignes EZ & ZB vous trouviez une troisiéme proportionnelle EF, que vous fassiez en E paralléle à AB; je dis que la Parabole dont le sommet est E, le diamétre EZ, & son paramétre ou diamétre contigu sous un angle ZEF égal à AZE, est la ligne EF, passera par les points A & B, ou elle touchera les lignes AC & BD: car la ligne EF estant troisiéme proportionnelle Géometrique aux deux EZ & ZB, le quarré de ZB ou de son égale ZA, sera égal au rectangle ZEF; & partant les lignes ZA, ZB seront ordonnées au diamétre EZ d'une Parabole dont le sommet sera E, & le diamétre contigu EF. Et parce que EZ est égal à GE, les deux lignes GA & GB toucheront

ront la Parabole aux points A & B, par la 33. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Second Cas du troisiéme Probléme.

Si vous prenez le sommet de vostre section entre les points E & Z (comme en la 3. Figure) au point F ; & qu'aprés avoir fait FH égal à FZ, vous faites que comme la ligne GH est à HF, ainsi FZ soit à une quatriéme ZY. Et si vous tirez par le point Y la ligne KYI paralléle à la rampe AB, & rencontrant les lignes AC, BD continüées en K & I, sur laquelle KI des points A & B, vous menez des lignes AP & BL paralléles à GY, & qu'entre les deux KY & YP, ou leurs égales IY & YL, vous faites des moyennes Géometriques de part & d'autre YM & YO; & enfin si vous prenez YN égale à YF, je dis que les deux lignes FN & MO sont diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse, qui touchera les deux lignes des pieds droits AC & BD aux points A & B. *Fig. III. de la IV. Planche.*

La démonstration en est quasi la mesme que celle du Probléme précédent, & elle se fait ainsi. Parce que GH est à HF comme FZ à ZY, en composant, permutant, & composant, GY sera à FY comme FY à ZY; & partant le Quarré FY sera égal au rectangle GYZ. Mais le rectangle KYP ou IYL est aussi égal au quarré MY ou YO; partant le rectangle sera au rectangle comme le quarré est au quarré. Maintenant le rectangle GYZ est au rectangle KYP en raison composée des lignes GY à KY, c'est à dire, AP à KP, & ZY ou son égale AP à YP : Donc le quarré FY sera au quarré MY en raison composée des lignes AP à KP, & AP à PY, c'est à dire, comme le quarré AP est au rectangle KPY. Mais le rectangle KPY est égal au rectangle MPO (comme nous dirons cy-dessous) Donc le quarré FY est au quarré MY, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diamétre FN est quarré du diamétre MO, comme le quarré AP est au rectangle MPO. Nous prouverons par le mesme dis-

discours que le quarré BL a aussi la mesme raison au rectangle MLO; mais les lignes AP & BL sont paralléles au diamétre FN, elles seront donc ordonnées au diamétre MO, & les points A & B seront dans l'Ellipse, dont le centre sera Y, & les lignes FN, MO diamétres de mesme conjugaison.

Je dis de plus, que ladite Ellipse touchera les lignes AC, BD aux mesmes points A & B : parce que la ligne FY est moyenne Géometrique entre les deux GY & YZ, & YN est égale à FY; la toute GN sera divisée Harmoniquement aux deux points F & Z, & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes GN & GF; & la ligne AZ est égale à ZB & paralléle à MO; donc les deux lignes AG & BG toucheront aux points A & B l'Ellipse dont le sommet est F, les diamétres de mesme conjugaison FN & MO, & les ordonnées AZ & BZ, par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que les deux rectangles KPY & MPO sont égaux, ce qui se fait en cette maniére. Le quarré MY & le rectangle KYP sont égaux; mais le quarré MY est égal au rectangle MPO avec le quarré PY; & le rectangle KYP est égal au rectangle KPY avec le mesme quarré PY; estant donc des égaux le mesme quarré PY, les restes seront égaux, sçavoir le rectangle KPY au rectangle MPO. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les lignes AG & BG sont égales, & que des points A & B l'on mene des lignes perpendiculaires aux mesmes AC & BD, elles se rencontreront dans la ligne GZ en un point qui sera le centre d'un cercle utile pour la solution de ce Probléme.

Troisiéme Cas du troisiéme Probléme.

Fig. IV. de la IV. Planche. Enfin, si vous prenez le point F entre E & G (comme en la 4. Figure); & que FH estant prise égale à GF, vous fassiez que

que comme ZH est à HF, ainsi FG soit à une quatriéme GY; puis par le point Y, si vous tirez indéfiniment la ligne KYI paralléle à la ligne de la rampe AB, & rencontrant les lignes CA & DB continüées en K & I, sur laquelle IK des points A & B vous fassiez tomber les lignes AP & BL paralléles à ZY, afin qu'entre les deux PY & YK, ou leurs égales LY & IY vous puissiez prendre les moyennes Géometriques de part & d'autre YM & YO, & qu'enfin vous fassiez YN égale à YF.

Je dis que Y est le centre d'une Hyperbole, dont les diamétres de mesme conjugaison sont FN & MO, & le sommet F, laquelle passant par les points A & B, y touchera les deux pieds droits AC & BD.

Parce que la ligne MY ou OY est moyenne Géometrique entre les deux PY & YK, ou leurs égales LY & IY; le quarré de MY ou de YO sera égal au rectangle KYP. De plus, parce que ZH est à HF, comme FG est à GY, en composant, & permutant ZF sera à FY comme HF ou son égale FG à GY, & en composant ZY sera à FY comme FY à GY; & partant le quarré de FY sera égal au rectangle ZYG. Donc le quarré FY sera au quarré MY, comme le rectangle ZYG est au rectangle KYP: Mais le rectangle est au rectangle en raison composée des lignes ZY à YP ou son égale AZ, & de YG à YK, c'est à dire, (à cause de la similitude des triangles GZA, GYK,) de GZ à la mesme AZ: Donc le quarré FY, sera au quarré MY, en raison composée des lignes YZ à AZ, & GZ à AZ, c'est à dire, comme le rectangle YZG au quarré AZ. Mais le rectangle YZG est égal au rectangle NZF, (ainsi que nous le démontrerons cy-aprés;) Et partant le quarré FY sera au quarré MY, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diamétre NF sera au quarré du diamétre MO, comme le rectangle NZF est au quarré AZ: Mais la ligne AB est paralléle à MO, & divisée en deux également en Z; Donc l'Hyperbole dont le sommet est F, le centre Y, & les diamétres de mesme conjugaison NF & MO, passera par les points A & O.

 Je

Je dis de plus, qu'elle y touchera les lignes des pieds droits A G. & B D : ce que je prouve en cette maniére. Dautant que la ligne F Y est moyenne Géometrique entre les deux Z Y & G Y, & que N Y est égale à F Y, la toute N Z sera diviséeHarmoniquement aux deux points G & F; & la ligne G Z sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes N Z & F Z; & par conséquent, par la 34 du. 1. des Coniques d'Apollonius, les deux lignes A G & B G toucheront l'Hyperbole en A & B.

Il ne reste plus qu'à prouver que le rectangle Y Z G est égal au rectangle N Z F : ce que je fais ainsi. Puis que Z Y est à F Y, comme F Y est à Y G; par conversion de raison, & permutant Z Y sera à F Y ou son égale Y N comme F Z à F G; & composant Z N sera à Y N comme Z G à F G; & par conversion de raison Z N sera à Z Y comme Z G est à Z F; & partant le rectangle des moyennes Y Z G sera égal au rectangle des extrêmes N Z E. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Décrire les Arcs rampans dont les hauteurs sont données.

PREMIERE HYPOTHESE.

Quand les lignes des pieds droits sont paralléles.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Fig. V. VI. de la IV. Planche.

Si les pieds droits A C, B D sont parallels (comme aux 5. & 6. Figures de la 4. Planche) & la ligne E F, qui détermine la hauteur, est aussi paralléle à celle de la rampe A B; en ce cas il ne faut que diviser la ligne A B en deux également en H, & tirer par le point H la ligne I H G paralléle aux lignes des pieds droits, & rencontrant E F en G; puis en prenant de l'autre part du point H la ligne H I égale à H G, le point H sera le cen-

centre, & les deux lignes AB, GI diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse, laquelle touchera les deux pieds droits aux points donnez A & B, & la ligne EF en G; avec cette différence, que si AB est perpendiculaire aux pieds droits, & que HG soit égale à AH, les deux AB & IG seront les diamétres d'un Cercle; ou les Axes de l'Ellipse proposée, si HG & AH sont inégales.

La démonstration est toute entiere dans la 32. du 1. & la converse de la 27. du 2. des Coniques d'Apollonius.

PROBLEME CINQUIE'ME.

Si les pieds droits AC, BD estant parallels, la ligne EF qui détermine la hauteur rencontre la ligne de la rampe AB comme au point I, soit de la part de B, (ainsi que la 7. Figure de la 4. Planche,) ou de la part de A (comme en la 8. Figure;) il faudra diviser comme dessus la ligne AB en deux également au point H, & tirer HG indéfiniment de part & d'autre du point H, & paralléle aux pieds droits, qui coupe la ligne EF au point G. Puis il faut faire GK égale à GF, & mener IK, à laquelle il faut aussi mener du point F une ligne paralléle FL, & faire la ligne GM égale à GL. Je dis que le point M sera celuy où l'Ellipse que l'on cherche doit toucher la ligne EF; & que si aprés avoir mené MN paralléle à AB, vous faites HO égale à HN, & sur la ligne GO comme diamétre, vous décrivez un Cercle GRO, qui coupe en R la ligne HR, tirée du point H perpendiculaire à HG, faisant ensuite les deux lignes HP, & HQ égales à HR, vous aurez les deux lignes PQ & AB pour ses diamétres de mesme conjugaison. *Figure VII. VIII. de la IV. Planche.*

La démonstration s'en fait en cette maniére, aprés avoir mené la ligne MV paralléle à HG. Dautant que GK est égale à GF, GL à GM, & LF paralléle à IK, la ligne IG sera à GK, c'est à dire, GF, comme GF est à GL, c'est à dire, GM. Et parce que MV est paralléle à GH, la ligne IH sera à AH ou HB, comme IG est à GF; & AH ou HB à HV, comme

FG à GM, c'est à dire, que HB sera moyenne Géometrique entre les deux IH & HV; & parce que AH est égale à HB, la toute AI dans la 7. Figure sera divisée Harmoniquement aux deux points V & B, ou dans la 8. Figure la toute BI aux deux points V & A, & en l'une & en l'autre la ligne VI sera la moyenne Harmonique entre les deux AI & BI: Et par conséquent HV sera à VB, comme HB à BI; & AI à IH, comme VI à IB. Par le mesme raisonnement nous montrerons que le rectangle GHO, c'est à dire, GHN estant égal au quarré de HR ou HP, les trois lignes QG, NG & PG sont aussi en continüelle proportion Harmonique.

Maintenant la raison du quarré HB, c'est à dire, du rectangle IHV au rectangle AVB estant composée des raisons des lignes IH à AV, & HV à VB, c'est à dire, HB à BI; & cette composition estant la mesme que celle de IH à BI, c'est à dire, AI à IV, & de HB à AV; & celle-cy estant encore la mesme que de AI à AV, & de HB à IV; il s'ensuit que la raison du quarré HB au rectangle AVB sera composée des raisons de AI à AV, & de HB à IV. Mais parce que AI est à IH, comme VI est à BI, en permutant, & par conversion de raison dans la 7. Figure, ou en divisant dans la 8; AI sera à AV, comme IH à HB; & partant la composition de raisons de AI à AV, & de HB à IV, sera la mesme que celle de IH à HB, & de HB à IV, c'est à dire, la mesme de IH à IV. Le quarré donc de HB, c'est à dire, le rectangle AHB sera au rectangle AVB, comme IH est à IV, c'est à dire, comme GH est à MV ou HN: Mais comme GH est à HN, ainsi est le quarré PH, c'est à dire, le rectangle QHP au quarré de HN ou MV; Donc le rectangle AHB sera au rectangle AVB; comme le rectangle QHP est au quarré de MV; & en permutant le rectangle AHB sera au rectangle QHP, comme le rectangle AVB est au quarré de MV. Et partant l'Ellipse dont AB & QP seront diamétres de mesme conjugaison, passera par le point M, d'où sont tirées les deux ordonnées MV & MN paralléles ausdits diamétres.

Il paroiſt encore qu'elle touchera les deux pieds droits AC & BD aux points A & B, parce que ces points ſont au bout du diamétre AB, & que les pieds droits ſont paralleles à l'autre diamétre PQ. Je dis de plus, qu'elle touchera la ligne EF au point M; ce qui eſt clair par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius.

Si la ligne de la rampe eſtant perpendiculaire aux pieds droits, la ligne tirée du point H en M ſe trouvoit auſſi perpendiculaire à celle de la hauteur EF, & égale à l'une des deux AH ou BH, ce ſeroit un Cercle qui réſoudroit la queſtion, dont le centre ſeroit H, & le diamétre AB; ce qui eſt clair par ce qui a eſté démontré cy-deſſus.

SECONDE HYPOTHESE.

Quand les pieds droits ſe rencontrent, & la ligne de la hauteur eſt paralléle à celle de la rampe.

PROBLEME SIXIE'ME.

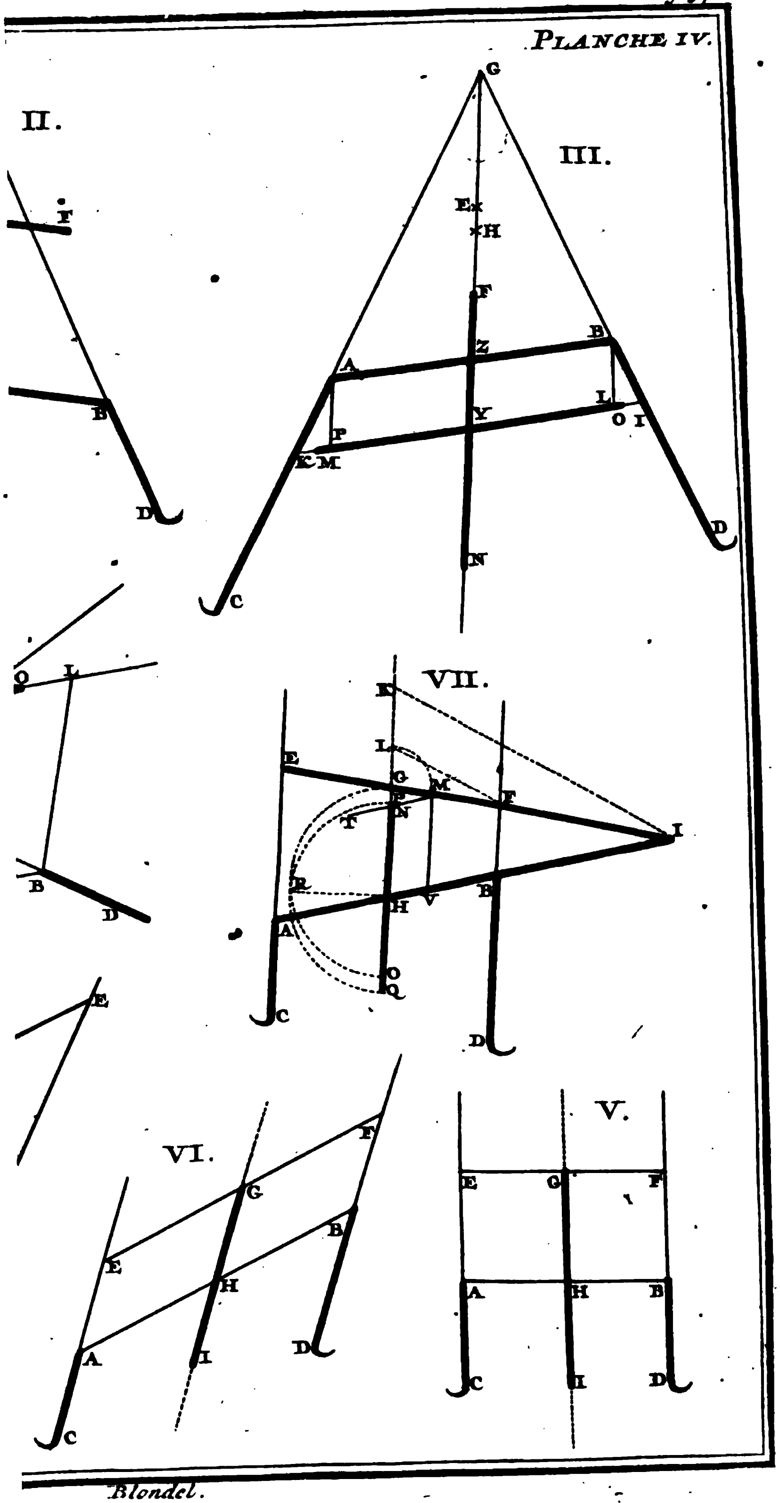
Si les pieds droits AC & BD ne ſont point parallels, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 5. Planche,) en ſorte qu'eſtant continüez, ils ſe rencontrent au deſſous au point G, de la part de C & D; & ſi la ligne EF qui détermine la hauteur eſt paralléle à celle de la rampe, il faut couper la ſuſdite ligne AB en deux également au point Z, par lequel de G il faut tirer indéfiniment la ligne GZ, qui coupera auſſi EF en deux également en H; duquel point H il faut tirer la ligne HB, & la couper en deux également en X, par où du point F il faut mener la ligne FX qui rencontre GZ en Y, puis mener AH & EY qui ſe rencontrent en V. Je dis que Y ſera le centre de l'Ellipſe, qui touchera les trois lignes AC en A, BD en B, & EF en H. Et que *Fig. I. de la V. Planche.*

si l'on fait YN égale à YH, & que menant par le point Y la ligne KYI paralléle à AB, & AP, BL paralléles à GY, l'on fasse YM moyenne Géometrique entre les deux KY & YP, & YO égale à YM: les deux lignes NH & MO en seront les diamétres de mesme conjugaison.

La démonstration s'en fait en cette maniére, aprés avoir tiré les lignes ZX, ZV, AY & BY. Dautant que la ligne KYI est paralléle à AB, elle sera divisée également en Y: & partant les deux triangles EYK, FYI sur bases égales, & entre mesmes paraléles seront égaux, aussi-bien que les deux AYK, BYI. Et partant les deux triangles EYA, FYB seront égaux; mais les deux EHY, FHY sont aussi égaux. Il y aura donc mesme raison du triangle EYA au triangle EHY, que du triangle FYB à FHY: Mais les triangles EYA & EYH ayans mesme base EY, sont entre eux comme les lignes AV & VH; & les triangles FYB, FYH comme les lignes BX & XH: Donc les lignes AV & VH seront entre elles comme les lignes BX & XH; mais ces derniéres sont égales par la construction: Donc les deux autres AV & VH seront aussi égales; & partant VX sera paralléle & égale à la moitié de AB, c'est à dire, AZ. Et parce que dans le triangle ABH, la ligne HB est à BX comme AB est à BZ, la ligne XZ sera paralléle & égale à la moitié de la base AH, c'est à dire, à VH. Par la mesme raison VZ sera paralléle & égale à XH.

Maintenant, si l'on continuë les lignes HB, EY jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R: Comme nous avons montré que AZ estoit égale à VX; AZ sera à EH, c'est à dire, ZG à GH, comme VX est à la mesme EH, c'est à dire, XR à RH; & en changeant, & par conversion de raison GH sera à HZ, comme RH à HX, ou à son égale VZ. Mais à cause de la similitude des triangles HYR, VYZ, le costé RH est à VZ comme HY est à YZ: Donc GH sera à HZ comme HY est à YZ; & en permutant, & divisant GY sera à HY comme HY

à



Blondel.

à YZ; c'est à dire, que HY, ou son égale NY sera moyenne Géometrique entre les deux GY & YZ; & partant la toute GH sera divisée Harmoniquement en Z & N; & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux GH & GN; & GY moyenne Arithmétique entre les mesmes. Par mesme raisonnement nous montrerons que KP est moyenne Harmonique entre les deux OK & KM; & KY moyenne Arithmétique entre les mesmes: aussi-bien qu'entre les deux MI & IO, la ligne IL sera moyenne Harmonique, & IY Arithmétique.

Maintenant nous pourrons faire voir par le mesme discours dont nous nous sommes servis aux précedentes propositions, que le rectangle HYN est au rectangle MYO, comme le quarré de AP est au rectangle KPY, ou son égal MPO; & comme le quarré BL est au rectangle YLI ou son égal OLM; & comme AP & BL sont paralléles à NH, elles seront ordonnées au diamétre MO; & l'Ellipse, dont les diamétres de mesme conjugaison seront HN & MO; passera par les points A & B, où elle touchera aussi les lignes AG, BG par la 34. du 1. des Coniques, & la ligne EF en H par la converse de la 6. du 2. du mesme. Ce qu'il falloit démontrer.

Que si les deux lignes AG & BG estant égales, & AY perpendiculaire à AC, elle se trouvoit égale à YH; ce seroit un Cercle, qui résoudroit le Probléme dont le centre seroit Y, & YH demidiamétre.

PROBLEME SEPTIEME.

Si les pieds droits AC & BD ne sont point paralleles, mais en surplomb (comme aux 2. 3. & 4. Fig. de la 5. Planche), en sorte qu'estant prolongez, ils se rencontrent au dessus, comme au point G de la part de A & B; & si la ligne EF, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire est paralléle à celle de la rampe AB. Il y a trois Cas différens en cette proposition, qui dé- *Fig. II. III. IV. de la V. Planche.*

demandent chacun une Section Conique pour leur solution, en la mesme maniére que nous avons dit en l'explication du troisiéme Probléme cy-dessus: Car aprés avoir divisé la ligne de la rampe AB en deux également en Z, & tiré du point G la ligne GZ; Il arrivera que la ligne EF passera par le milieu de la susdite ligne GZ en H (comme en la 2 Figure,) ou bien elle passera au dessous (comme en la 3. Figure;) en sorte que la ligne ZH soit moindre que HG; ou enfin elle passera au dessus (comme en la 4. Figure,) en sorte que GH soit moindre que HZ. Au premier cas il faudra une Parabole pour résoudre la question; au second une Ellipse; au troisiéme une Hyperbole. Et pour les traitter avec ordre.

Premier Cas du Probléme septiéme.

Fig. II. de la V. Planche. Soit (comme en la 2. Figure de la 5. Planche,) la ligne de la hauteur EF, qui passe au point H, où la ligne GZ est divisée en deux également; & aprés avoir tiré les deux lignes AH & BH, soit BH aussi partagée en deux également en X, & tirée indéfiniment FX, à laquelle du point E il faut mener EV parallé-le. Je dis que la section qui touchera les trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H, sera une Parabole. Ce que je démontre en cette maniére.

Dautant que la ligne GZ est double de HZ, & que EF est paralléle à AB, la ligne GB sera aussi double de BF, & GA double de EA: Mais la ligne BH est aussi double de BX; & partant dans le triangle GHB, la ligne GB sera à BF comme HB à BX: Donc la ligne FX sera paralléle à GH. De plus, la ligne EV ayant esté faite paralléle à FX, elle le sera aussi à GH; & partant dans le triangle GHA, la ligne GA sera à AE comme HA à AV: Mais GA est double de AE; donc HA sera aussi double de AV; c'est à dire, que la ligne EV divisera AH en deux également en V; aussi-bien que FX la ligne BH en

en X; & GZ la ligne AB en Z. Et partant par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius, les trois lignes GZ, FX, EV seront diamétres d'une section, que les lignes AC, BD & EF toucheront aux points A, B, & H: Mais ces trois diamétres sont paralleles; donc la section sera une Parabole par la 46. du 1. des mesmes Coniques. Si donc nous faisons HI troisiéme proportionelle Géometrique aux deux lignes HZ & AZ; & si nous décrivons une Parabole, dont le diamétre soit HZ, son paramétre ou diamétre contigu HI, le sommet H, & l'angle des ordonnées GHF; elle passera par les points susdits A, B, & H, où elle touchera les trois lignes AC, BD, & EF.

Et premiérement, il est constant qu'elle passera par le point H, puis qu'il en est supposé le sommet; en suite HI estant troisiéme proportionnelle Géometrique aux deux HZ & AZ, le quarré AZ ou BZ sera égal au rectangle ZHI; & partant les deux points A & B seront dans la Parabole, laquelle touchera les lignes AC & BD aux mesmes points, par la 33. du 1. des mesmes Coniques, & la ligne EF en H par la converse de la 46. du mesme.

Second Cas du Probléme septiéme.

Que si la ligne de la hauteur EF coupe GZ, en sorte que GH soit plus grande que HZ (comme en la 3. Figure de la 5. Planche;) aprés avoir tiré les lignes AH & BH, & divisé HB en deux également en X, tiré FX jusqu'à ce qu'elle rencontre GZ au point Y, & mené EY. Je dis que le point Y sera au dessous du point H vers Z, & que la section qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B, H, sera une Ellipse, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons YN égale à YH, & qu'aprés avoir mené par le point Y la ligne KYI paralléle à AB, & sur laquelle tombent les lignes AP & BL paralléles à GZ, nous faisons (ainsi qu'il s'est dit tant de *Fig. LI. de la V. Planche.*

H fois)

fois) YM & YO moyennes Géometriques entre KY & YP, ou entre IY & YL, les deux lignes HN & MO en feront les diamétres de mesme conjugaison.

Il se démontre en cette maniére, aprés avoir continüé les lignes VE, BX jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R, & mené les lignes VX, VZ, XZ: AY, BY: & F ♪ paralléle à GY. Dautant que GH est plus grande que HZ, & EF paralléle à AB, la ligne GF sera aussi plus grande que FB: Mais HX est égale à BX; donc dans le triangle GHB la ligne GF aura plus grande raison à FB que HX à BX, & en composant GB aura plus grande raison à FB que HB à BX: Mais comme GB est à FB, ainsi HB est à B ♪: Et par conséquent HB aura plus grande raison à B ♪ qu'à BX; & partant BX sera plus grande que B ♪; & le point X sera entre ♪ & H; & l'angle BFY sera plus grand que l'angle BF ♪, c'est à dire, BGZ: Et partant la ligne FY rencontrera GZ continüée de la part de Z au point Y.

De plus, comme les triangles KEY, IFY, sur bases égales KY, & IY, & entre mesmes paralléles KI, EF, sont égaux; aussi-bien que les triangles KAY, IBY, & EYH, FYH. Si des égaux KEY, IFY on oste les égaux KAY, IBY; les restes seront égaux, c'est à dire, les triangles AEY, BFY: Et partant le triangle AEY aura mesme raison au triangle EYH que BFY à FYH. Mais les triangles AEY, EYH ayans mesme base EY, sont entre eux comme les lignes AV & VH; & les triangles BFY, FYH ayans aussi mesme base FY, sont comme les lignes BX & XH; la ligne AV sera à VH comme BX est à XH: Mais BX est égale à XH par la construction; donc AV sera aussi égale à VH; & partant la ligne EY coupera AH en deux également en V; aussi-bien que FY la ligne BH en X; & GY la ligne AB en Z; & le point Y a esté démontré au dessous du point G vers Z: Et par conséquent les trois lignes EY, FY, GY seront diamétres d'une Ellipse qui tou-

touchera les trois lignes AG, BG, EF aux points A, B, & H, par la 29. du 2. des Coniques d'Apollonius.

Je dis de plus, que les lignes HN & MO en feront les diamétres de mesme conjugaison. Comme AH est double de HV, aussi-bien que BH double de HX: la ligne VX dans le triangle AHB sera paralléle, & égale à la moitié de la ligne AB, c'est à dire, à AZ. Par la mesme raison XZ dans le mesme triangle sera égale, & paralléle à la moitié de la ligne AH, c'est à dire, à VH; & VZ égale & paralléle à HX; & partant AZ sera à EH, c'est à dire, ZG à GH, comme VX à la mesme EH, c'est à dire, XR à RH: & en changeant & divisant GH sera à HZ comme RH à HX, ou à son égale VZ. Mais parce que dans le triangle RHY, la ligne RH est à VZ comme HY à YZ; la ligne GH sera à HZ comme HY à YZ; & en permutant & composant GY sera à HY comme HY à YZ: c'est à dire, que HY sera moyenne Géometrique entre les deux GY & YZ; Mais YN est égale à YH. Donc la toute NG est divisée Harmoniquement aux points Z & H; & GZ est moyenne Harmonique entre les deux NG & GH; & GY moyenne Arithmétique entre les mesmes.

Maintenant nous démontrerons, ainsi qu'en la précédente proposition, que le quarré de AP ou BL est au rectangle MPO ou OLM, comme le quarré du diamétre HN est au quarré du diamétre MO. Mais les lignes AZ & BZ sont égales entre elles, & paralléles à MO; elles sont donc ordonnées à l'autre diamétre HN dans l'Ellipse, dont les diamétres de mesme conjugaison sont HN & MO, laquelle touchera les lignes AC, BD en A & B, par la 34. du 1. des Coniques, & EF en H par la converse de la 6. du 2. des mesmes.

Que si les lignes AG & BG estoient égales, & AY estant perpendiculaire à AC se trouvoit égale à YH; ce seroit un cercle qui satisferoit au Probléme dont le centre seroit Y, & le demi-diamétre YH, ou AY.

Troisiéme Cas du septiéme Probléme.

Fig. IV. de la V. Planche. Enfin si la ligne de la hauteur EF coupe GZ, en sorte que GH soit moindre que HZ (comme en la 4. Figure de la 5. Planche,) aprés avoir tiré commme cy-dessus les lignes AH, BH, & divisé BH en deux également en X, & mené FX indéfiniment de part & d'autre, laquelle rencontre GZ prolongée en Y, & AB en T, & tiré EY indéfiniment de part & d'autre, qui rencontre AH en λ, & AB en S.

Je dis que le point Y sera dans la ligne GZ prolongée de la part de G, & que la section qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B & H, sera une Hyperbole, dont le centre sera Y. Et partant si nous faisons YN égale à YH, & ayant mené la ligne PYL par le centre Y, & paralléle à AB, si nous continüons AG & BG jusqu'en K & I; & tirant AP & BL paralléles à GZ, si nous prenons YM & YO moyennes Géometriques entre les deux KY & YP, ou leurs égales IY & YL: les lignes NH & MO en seront les diamétres de mesme conjugaison.

Il se démontre ainsi, aprés avoir méné la ligne XQV paralléle à AB, & rencontrant la ligne YE au point V. Dautant que EF est paralléle à AB, & AZ égale à BZ; EH sera aussi égale à FH; Mais dans le triangle YZS, la ligne EH est à ZS comme YH est à YZ; Et dans le triangle YZT, comme YH à YZ, ainsi HF à ZT; Donc EH sera à ZS comme HF à ZT; & partant ZS sera égale à ZT. Mais ZT est à QX comme ZS à VQ; Donc QX sera aussi égale à QV; & partant BZ sera à QX, c'est à dire, ZH à HQ comme AZ à VQ; Et par conséquent le point V est dans la ligne AH, & le mesme que le point λ, & en la mesme raison de AH à HV, comme de ZH à HQ, ou BH à HX; c'est à dire, que la ligne YES coupera AH en deux également en V, comme YFT la ligne

ligne BH en X, & YHZ la ligne AB en Z: & le point Y est au dessus du point G, comme nous le démontrerons cy-dessous; Et par conséquent les trois lignes YES, YFT, YHZ, seront diamétres d'une Hyperbole qui touchera les trois lignes AC, BD, EF aux points A, B & H, par la 29. du 2. des Coniques.

Je dis de plus, que les lignes HN & MO en sont les diamétres de mesme conjugaison, aprés avoir continüé la ligne BH jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EY en R, & mené VZ. Nous démontrerons comme en la proposition précédente, que VX est paralléle & égale à AZ, & VZ paralléle & égale à HX; & que par conséquent AZ sera à EH, c'est à dire, ZG à GH comme VX à la mesme EH, c'est à dire, XR à RH; & en changeant & divisant GH sera à HZ comme RH à HX ou à son égale VZ. Mais dans le triangle YVZ, la ligne RH est à VZ comme YH est à YZ; Donc YH sera à YZ comme GH à HZ; & en changeant, permutant, & par conversion de raison YZ sera à YH comme YH à YG; c'est à dire, que YH sera moyenne Géometrique entre les deux YZ & YG; Et comme YN est égale à YH, la toute NZ sera divisée Harmoniquement aux points G & H, & la ligne GZ sera moyenne Harmonique entre les deux NZ & ZH, & la ligne YZ moyenne Arithmétique entre les mesmes.

Maintenant, parce que le quarré YH est égal au rectangle ZYG, & le quarré YO au rectangle PYK; le quarré sera au quarré comme le rectangle est au rectangle: Mais la raison du rectangle ZYG au rectangle KYP est composée des raisons des lignes ZY à PY, ou à son égale AZ, & de YG à YK, c'est à dire, (à cause de la similitude des triangles YGK & ZGA). de GZ à AZ; Donc le quarré YH sera au quarré YO en raison composée des raisons de ZY à AZ, & de GZ à AZ, c'est à dire, comme le rectangle YZG au quarré AZ. Mais le rectangle YZG est égal au rectangle NZH (comme nous le démontre-

trerons cy-dessous;) Donc le quarré YH sera au quarré YO, ou prenant leurs quadruples, le quarré du diamétre transverse NH sera au quarré du diamétre droit MO, comme le rectangle NZH au quarré AZ. Mais AZ est égale à ZB, & parallèle au diamétre MO, elles seront par conséquent ordonnées au diamétre NZ; & les points A & B seront dans l'Hyperbole, dont NH & MO seront diamétres de mesme conjugaison, & le sommet au point H.

Il paroist de plus, que les lignes AG & BG toucheront la susdite Hyperbole aux mesmes points A & B, parce que la ligne NZ est divisée Harmoniquement en G & H, par la 34. du 1. des Coniques; & la ligne EF au sommet H, parce qu'elle est parallèle à l'ordonnée AB par la converse de la 6. du 2. des mesmes.

Il faut maintenant faire voir que le point Y est dans la ligne ZG prolongée de la part de G, comme nous l'avons promis cy-dessus: ce qui se fait en cette maniére, aprés avoir tiré la ligne Fδ paralléle à GZ. Dautant que GH est supposée moindre que HZ, & que EF est parallèle à AB; GF sera aussi moindre que FB; Mais HX est égale à XB; Donc GF aura moindre raison à BF, que HX à XB; & en composant GB aura moindre raison à BF, que HB à BX; Mais comme GB à BF, ainsi HB à Bδ; Donc HB aura moindre raison à Bδ qu'à BX; Et partant Bδ sera plus grande que BX, & l'angle BFX moindre que l'angle BFδ, ou son égal BGH: Et partant la ligne XF rencontrant δF en F, rencontrera aussi sa parallèle ZG prolongée au dessus de G en Y.

De plus, il faut montrer que les rectangles YZG & NZH sont égaux; ce qui se fait ainsi. Parce que ZY est à YH comme YH à YG, par conversion de raison, & en permutant ZY sera à HY, ou à son égale YN comme ZH à GH, & en composant, & par conversion de raison NZ sera à YZ comme GZ à HZ. Et partant le rectangle des moyennes YZG sera égal

à

à celuy des extrêmes NZH. Qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

TROISIÉME HYPOTHESE.

Quand les pieds droits ne sont point paralleles entre eux, ny la ligne de la hauteur à celle de la rampe.

PROBLEME HUITIÉME.

Si les pieds droits AC, BD ne sont point paralleles, mais en talu (comme en la 1. Figure de la 6. Planche) en sorte qu'estant prolongez, ils se rencontrent au dessous, comme au point G de la part de C & D. Et si la ligne EF, qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, n'est point parallèle à celle de la rampe AB; mais l'une & l'autre estant prolongées, se rencontrent comme au point I. *Figure I. de la VI. Planche.*

Il faut premiérement couper la ligne AB en deux également en Z, & tirer indéfiniment la ligne GZ; puis entre les deux EI & IF trouver une moyenne proportionnelle Harmonique IH, & du point H méner les deux HB & HA; ensuite il faut diviser HB en deux également en X, & méner FX qui rencontrera la ligne GZ prolongée en Y, & joindre les points EY.

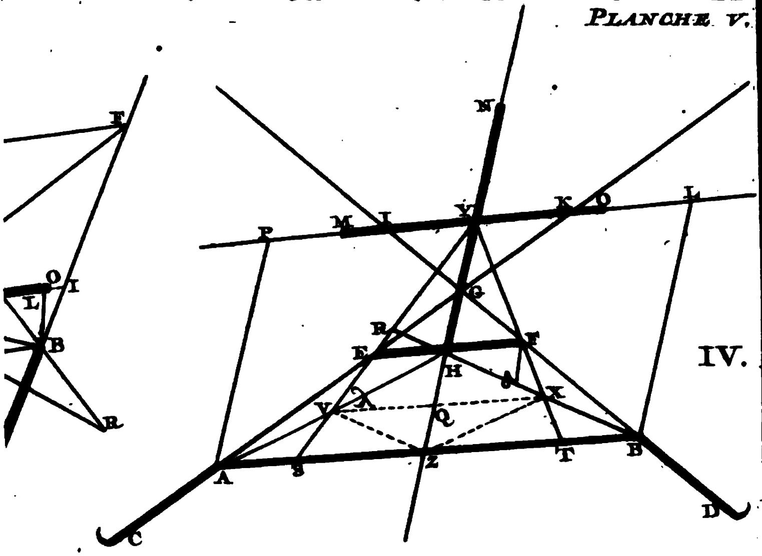
Je dis que Y sera le centre d'une Ellipse qui touchera les trois lignes AC en A, BD en B, & EF en H; & que si ayant tiré la ligne HY indéfiniment, & fait YT égale à YH, l'on méne par le point Y la ligne NYM parallèle à EF, sur laquelle des points A & B l'on mène les deux Aδ & BP parallèles à HT, aussi-bien que Aψ & BS parallèles à MN; & qu'enfin entre les deux NY & Yδ, l'on prenne Yε moyenne Géometrique, à laquelle on fasse Yβ égale. Je dis que les deux lignes HT & $\varepsilon\beta$ seront les diamétres de mesme conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour

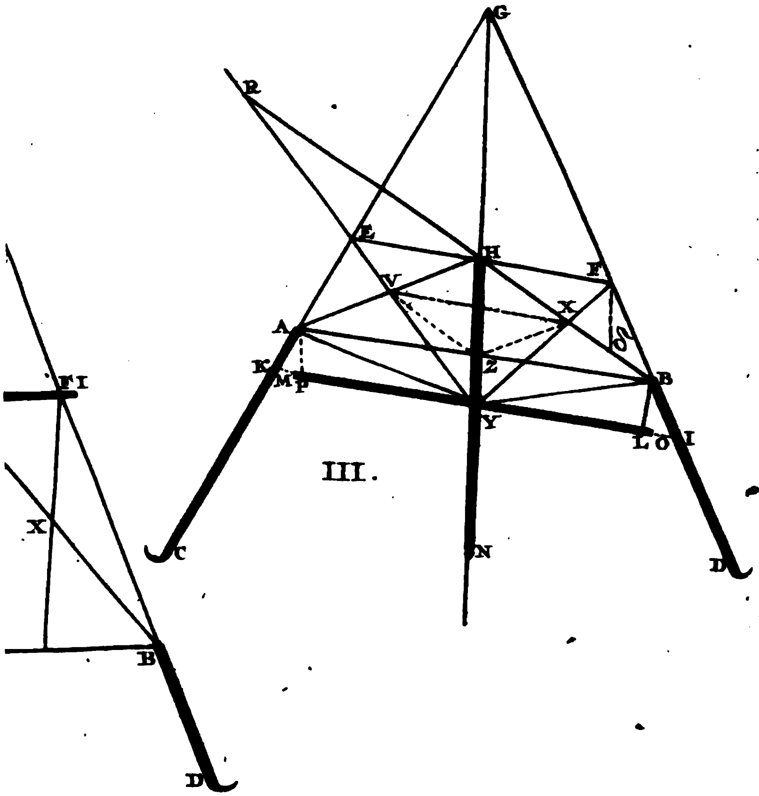
Pour le démontrer, il faut mener par le point Y la ligne KYQ parallèle à AB, & Yν perpendiculaire à GB, & Yλ à GA; puis sur AB prolongée, des points E & F tirer les lignes Eμ & Fη parallèles à GZ, & mener AY, BY; aprés quoy je raisonne en cette maniére.

Puis que KQ est paralléle à AB, & que AB est divisée en deux également en Z, par la ligne GZ, la ligne KQ le sera pareillement en Y; & les triangles GKY, GQY seront égaux, & leurs costez seront en raison reciproque de leurs hauteurs, c'est à dire, que le costé GK sera au costé GQ, c'est à dire, GA à GB, comme Yν hauteur du triangle GQY est à Yλ hauteur du triangle GYK. De plus, les triangles AEY & BFY estant l'un à l'autre en raison composée de celles de leurs costez & de leurs hauteurs, & la hauteur du triangle AEY estant Yλ, & Yν celle du triangle BFY; le triangle AEY sera à BFY en raison composée des raisons du costé AE au costé BF & de la hauteur Yλ à la hauteur Yν. Mais la raison du costé AE à BF est encore composée des raisons de AE à Eμ, c'est à dire, (à cause de la similitude des triangles AEμ & AGZ) de AG à GZ, de Eμ à Fη, & de Fη à FB, c'est à dire, GZ à GB (à cause que les triangles BFη, BGZ sont aussi semblables.) La raison donc du triangle AEY à BFY sera composée des raisons de AG à GZ, Eμ à Fη, GZ à GB, & Yλ à Yν. Mais il a esté démontré cy-dessus que Yλ est à Yν comme GB est à GA; & les raisons de AG à GZ, & GZ à GB sont égales à celle de AG à GB; & partant le triangle AEY sera à BFY en raison composée de AG à GB, GB à GA, & Eμ à Fη: Mais les raisons de AG à GB, & GB à GA se détruisent; il ne reste donc plus que la raison de Eμ à Fη pour celle du triangle AEY à BFY: Mais Eμ est à Fη comme EI à IF, c'est à dire, comme EH à HF par la construction, ou comme le triangle EYH au triangle HYF: Donc le triangle AEY sera au triangle BFY, comme le triangle EYH à HYF; & en per-

PLANCHE V.



IV.



III.

Blondel.

permutant AEY sera à EYH comme BFY à HYF. Mais les deux triangles AEY, EYH ayant une base commune EY, sont entre eux comme les lignes AV & VH; & les deux BFY, HYF ayant la base commune FY, sont entre eux, par la mesme raison, comme les lignes BX & XH; il s'ensuit que AV est à VH comme BX est à XH; mais celles-cy sont égales par la construction: Donc AV sera aussi égale à VH.

Et partant la ligne EY coupant AH en deux également en V; & la ligne FY coupant de mesme BH en X; aussi-bien que GY la ligne AB en Z: il s'ensuit que les trois lignes EY, FY & GY sont diamétres d'une Ellipse, dont le centre est Y, & qui touchera les trois lignes AC, BD & EF en A, B & H.

Il faut maintenant montrer que HT & $\iota\beta$ en sont les diamétres de mesme conjugaison; & pour cét effet il faut des points E & F méner sur la ligne NM prolongée les lignes E2 & FR parallèles à HT, laquelle il faut continüer de part & d'autre, en sorte qu'elle rencontre AC en χ, & BD en ζ; puis du point F méner FL parallèle à BH, rencontrant TH en L; & par le point X tirer LX, qui rencontre BD en O, & mener YO. En la mesme maniére du point E il faut méner Eς paralléle à AH, qui rencontre TH en ς; d'où par le point V il faut tirer ςV, rencontrant AC en 3, & méner Y 3.

Maintenant, parce que HX est égale à XB, la ligne LF aura mesme raison à l'une & à l'autre; mais comme LF est à HX, ainsi (dans le triangle LYF) la ligne LY est à YH; & comme LF est à XB, ainsi (dans le triangle LOF, la ligne LO est à OX: Donc LY est à YH comme LO à OX; & par conversion de raison LY est à LH comme LO à LX; & partant dans le triangle LYO, la base YO est paralléle à HX, c'est à dire, à LF; & les triangles YXO, LXF sont semblables, aussi-bien que YζO, LζF: Et par conséquent YO est à LF comme YX à XF, c'est à dire, YH à HL: & YO à LF comme Yζ à ζL: Donc YH est à HL comme Yζ est à ζL; & en permutant Yζ est à YH comme ζL à HL: Mais comme Yζ est à YH, ainsi ζM est à MF, & comme ζL à LH, ainsi ζF à FB: Donc ζM est à MF

comme ζF à FB, & en permutant & par converſion de raiſon ζM eſt à MF comme MF à MB. Mais comme ζM eſt à MF, ainſi ζY eſt à FR ou à ſon égale HY; & comme FM à MB, anſi FR eſt à BP, c'eſt à dire, HY à SY: Donc ζY eſt à HY comme HY à SY: Et partant HY ſera moyenne Géometrique entre les deux ζY & SY: Mais YT eſt égale à YH: Donc la toute Tζ ſera diviſée Harmoniquement aux deux points H & S, & la ligne ζS ſera moyenne Harmonique entre les extrêmes Tζ & Hζ; & la ligne ζY ſera moyenne Aritmétique entre les meſmes.

Par le meſme raiſonnement nous démontrerons que AV eſtant égale à VH, la ligne Eς aura meſme raiſon à l'une & à l'autre; Mais Eς eſt à HV, dans le triangle EYς, comme EY à YV; & Eς à AV, dans le triangle Eʒς, comme Eʒ à ʒA; EY ſera à YV comme Eʒ à ʒA; & par converſion de raiſon Eʒ eſtant à EA comme EY à EV, dans le triangle EYʒ, la baſe Yʒ ſera parallèle à AV, c'eſt à dire, Eς. Et partant les triangles ʒχY, Eχς ſont ſemblables, auſſi-bien que ʒVY, EVς. Et par conſéquent ʒY ſera à Eς comme χY à χς; & ʒY à Eς comme YV à VE, c'eſt à dire, comme YH à Hς: Donc χY ſera à χς comme YH à Hς, & en permutant χY ſera à YH, comme χς à Hς. Or eſt-il que comme χY eſt à YH, ainſi χN eſt à NE, & comme χς à Hς, ainſi χE eſt à EA; Donc χN eſt à NE comme χE eſt à EA: & en permutant, changeant, diviſant & changeant χN ſera à NE comme NE à AN. Mais comme χN eſt à NE, ainſi χY eſt à YH ou ſon égale YT, & comme NE eſt à AN, ainſi HY ou YT eſt à Yψ; Et partant χY eſt à TY comme TY eſt à Yψ, & TY eſt moyenne Géometrique entre les deux χY & Yψ. Mais YH eſt égale à YT; Donc la toute Hχ eſt diviſée Harmoniquement aux deux points ψ & T; & la ligne χψ eſt moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes Hχ & χT; & la ligne χY ſera la moyenne Arithmétique entre les meſmes.

Maintenant, puis que la ligne HY ou TY eſt moyenne proportionnelle

portionnelle Géométrique tant entre les deux ζY & YS, qu'entre les deux χY & Yψ, les rectangles ζYS & χYψ seront égaux entre eux, & au quarré HY: & ils auront l'un & l'autre mesme raison au quarré Yε ou Yβ. Mais le rectangle χYψ est au quarré Yε, ou à son égal le rectangle NYδ, en raison composée des lignes χY NY, c'est à dire, Aδ à Nδ, & de Yψ ou Aδ à Yδ. Donc le quarré TY sera au quarré Yε en raison composée des lignes Aδ à Nδ, & Aδ à Yδ, c'est à dire, comme le quarré Aδ au rectangle NδY: Mais le rectangle NδY est égal au rectangle $\varepsilon\delta\beta$ (comme nous le démontrerons cy-dessous;) Et partant le quarré Aδ sera au rectangle $\varepsilon\delta\beta$, comme le quarré TY, c'est à dire, le rectangle TYH, est au quarré εY, c'est à dire, au rectangle εYβ. Mais la ligne Aδ est parallele au diamétre TH, & partant ordonnée au diamétre $\varepsilon\beta$; Donc le point A sera dans l'Ellipsé, dont TH & $\varepsilon\beta$ sont diamétres de mesme conjugaison.

Par le mesme discours nous dirons que le rectangle ζYS estant au rectangle MYP en raison composée des lignes ζY à YM, c'est à dire, BP à PM, & de SY ou BP à YP; Et le rectangle MYP estant égal au quarré Yβ (comme nous le démontrerons cy-dessous;) le rectangle ζYS, c'est à dire, le quarré HY sera au rectangle MYP, c'est à dire, au quarré Yβ, en raison composée des lignes BP à PM, & BP à YP, c'est à dire, comme le quarré BP est au rectangle MPY: Mais le rectangle MPY est égal au rectangle εPβ (ainsi que nous le démontrerons cy-dessous;) Et par conséquent le quarré BP sera au rectangle εPβ comme le quarré HY, c'est à dire, le rectangle HYT est au quarré Yβ, c'est à dire, au rectangle εYβ. Mais il a esté démontré cy-dessus, que le quarré Aδ estoit au rectangle $\varepsilon\delta\beta$, comme le mesme rectangle HYT est au rectangle εYβ; Et partant le quarré Aδ sera au rectangle $\varepsilon\delta\beta$, comme le quarré BP au rectangle εPβ. Et parce que BP est parallele à Aδ, c'est à dire, au diamétre TH, elle sera ordonnée au diamétre

 $\varepsilon\beta$;

$\epsilon\beta$; Et par conséquent le point B sera aussi dans l'Ellipse, dont les lignes TH & $\epsilon\beta$ sont diamétres de mesme conjugaison.

Je dis de plus, que les lignes AC, BD & EF toucheront la mesme Ellipse aux points A, B & H; ce qui se démontre en cette maniére. Dautant que la ligne EH est tirée au sommet du diamétre TH parallèle à l'autre diamétre $\epsilon\beta$, elle touchera l'Ellipse en H par la 6. du 2. des Coniques d'Apollonius. De plus, la ligne A ψ estant tirée du point A dans l'Ellipse, & parallèle au diamétre $\epsilon\beta$, & coupant l'autre diamétre TH au point ψ, de telle sorte que la ligne $\chi\psi$ est moyenne Harmonique entre les deux H χ & χ T; la ligne AC χ touchera l'Ellipse susdite au point A par la 34. du 1. des Coniques. Et par la mesme proposition la ligne DB ζ la touchera en B, d'où la ligne BS est tirée parallele à $\epsilon\beta$, & de telle sorte, que ζ S est moyenne Harmonique entre les deux T ζ & ζ H.

Nous avons donc trouvé le point Y & les deux lignes HT & $\epsilon\beta$ pour centre, & diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse qui touchera les trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant faire voir, ainsi que nous l'avons promis cy-dessus, que les rectangles N δ Y & $\epsilon\delta\beta$ sont égaux, aussi-bien que les rectangles MPY & β P ϵ; & que le rectangle MYP est égal au quarré Y β ou Y ϵ; ce que je fais premiérement pour les rectangles N δ Y, $\epsilon\delta\beta$ en cette maniére. Dautant que le rectangle NY δ est égal par la construction au quarré ϵ Y, si l'on oste de l'un & de l'autre le mesme quarré δ Y, le rectangle N δ Y restera d'une part, & le rectangle $\epsilon\delta\beta$ de l'autre, qui seront par conséquent égaux.

Pour la démonstration du reste, il faut méner la ligne VX, & la continüer de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne EI au point 9, & la ligne MN prolongée au point 8. Il faut de plus continüer les lignes HB & HA qui rencontrent

la

la mesme MN prolongée en 7 & 6, & faire Iθ égale à IF, puis raisonner en cette sorte. Dautant que AV est égal à VH & BX à XH, la ligne AH sera à VH comme BH à XH; Et partant VX sera parallèle à AB; & IH sera à H9, comme BH à HX. Mais BH est double de HX, donc IH sera aussi double de H9. Derechef EH estant à HF comme EI à IF, en composant, permutant, & changeant Eθ sera à EF comme IF est à HF. De plus, EH estant à HF comme EI à IF, en permutant & changeant EI sera à EH comme IF à HF; Et partant EI est à EH comme Eθ à EF, & par conversion de raison EI sera à IH comme Eθ à Fθ, & en divisant EH à IH comme EF à θF; Et partant EH à la moitié de IH, c'est à dire, H9, comme EF à la moitié de θF; c'est à dire, IF, & en composant E9 à H9 comme EI à IF. Mais comme EI est à IF, ainsi EH à HF; Donc E9 sera à H9 comme EH est à HF, & en permutant, & par conversion de raison, E9 sera à H9 comme H9 à F9.

Or parce que dans les triangles semblables EV9, YV8 comme E9 est à H9, ainsi Y8 est à 86, & dans les triangles semblables HX9, 7X8, comme H9 est à F9, ainsi 78 est à Y8; il s'ensuit que la ligne 78 est à Y8 comme Y8 à 86, & en la mesme raison que E9 à H9; Mais comme 78 est à Y8, ainsi 7Y est à Y6, & comme E9 à H9, ainsi EH ou son égale 2Y est à HF, ou son égale YR; il s'ensuit donc que 7Y est à Y6 comme 2Y est à YR, & partant que le rectangle des extrêmes 7YR est égal au rectangle des moyennes 6Y2.

Maintenant, parce que ζY est à HY comme HY est à SY, par conversion de raison ζY sera à ζH comme YH à HS; Mais comme ζY est à ζH, ainsi MY est à HF ou à son égale YR; & comme YH est à HS, ainsi 7Y est à BS ou à son égale YP; Donc MY sera à YR comme 7Y à YP; & partant le rectangle des extrêmes MYP est égal au rectangle des moyennes 7YR.

De plus, parce que χ Y est à HY comme HY à Y ψ; & que χ Y est à HY comme χ N est à NE, & YN à N 2; Il s'ensuit que YN est à N 2 comme HY est à Y ψ, & YN à Y 2 comme HY à H ψ. Mais HY est à H ψ comme 6 Y est à A ψ, ou à son égale δ Y; Donc YN sera à Y 2 comme 6 Y est à δ Y, & le rectangle des extrêmes N Y δ sera égal au rectangle des moyennes 6 Y 2.

Et par conséquent le rectangle MYP sera au rectangle 7 Y R comme le rectangle N Y δ au rectangle 6 Y 2, & en permutant MYP sera à N Y δ comme 7 Y R à 6 Y 2. Mais il a esté démontré cy-dessus que les rectangles 7 Y R & 6 Y 2 sont égaux; Partant les rectangles MYP & N Y δ seront aussi égaux. Mais le quarré ε Y, ou son égal β Y est egal au rectangle N Y δ par la construction; il sera donc aussi égal au rectangle MYP.

Et si l'on oste de l'un & de l'autre le commun quarré de YP, il restera le rectangle MPY égal au rectangle ε P β. Qui est tout ce que nous devions démontrer.

Le cercle pourroit aussi servir à la solution de ce Probléme, si les deux lignes AG & BG estant égales aussi-bien que les trois AY, BY, & HY, celles-cy se trouvoient aussi perpendiculaires aux lignes AC, BD, & EF, chacune à la sienne.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Fig. II. de la VI. Planche. Fig. I. & II. de la VII. Planche.

Enfin, si les pieds droits AC & BD ne sont point paralleles, mais en surplomb (comme à la 2. Figure de la 6. Planche, & aux Figures de la 7. Planche) en sorte qu'estant prolongez, ils se rencontrent au dessus, comme en G de la part de A & B; & si la ligne EF, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire, n'est point parallèle à la rampe AB, mais que l'une & l'autre estant prolongées, se rencontrent, comme en I.

Il y a en cette proposition trois Cas à considérer, chacun desquels démande une section Conique particuliére pour sa solution; car

car ou la raiſon de la ligne EI à IF ſera la meſme que celle de GF à FB, ou elle ſera moindre, ou elle ſera plus grande. Au premier Cas (comme en la 2. Figure) il faut une Parabole. Au ſecond Cas (comme en la 3. Figure) il faut une Ellipſe. Au troiſiéme Cas (comme en la 4. Figure) il faut une Hyperbole. Et pour les traiter avec ordre.

Premier Cas du neuviéme Probléme.

Soit (comme en la 1. Figure de la 7. Planche) la ligne EI à la ligne IF, comme la ligne GF à FB; & aprés avoir coupé AB en deux également en Z, & méné GZ, qui diviſe EF en P, il faut du point F prendre FH égale à EP. *Fig. I de la VII. Planche.*

Je dis que la ſection qui touchera les deux lignes AC, BD aux points A & B, & la ligne EF, ſera une Parabole, & que le point H ſera celuy où elle touchera la ligne EF; en ſorte que ſi nous coupons la ligne GZ en deux également en O, & qu'aux deux lignes OZ & AZ nous faſſions une troiſiéme proportionnelle Géometrique OR, que nous ménions du point O parallèle à AB, la ligne OZ en ſera le diamétre ſous l'angle GZA, & OR ſera ſon paramétre ou diamétre contigu. Pour la démonſtration, il faut méner les lignes EL, HK, & FM parallèles à GZ, puis tirer les lignes AHQ & BH, qui rencontrent les lignes EL & MF prolongées en V, X, & Q, & méner VX & FK.

Dautant que HF eſt égale à EP, & que EL, HK, & FM ſont parallèles à GZ, les deux lignes LZ & KM ſeront auſſi égales; & par conſéquent les deux LK & ZM, auſſi-bien que les deux EH & PF. Et parce que EI eſt à IF, ainſi que GF à FB; & que comme EI eſt à IF, ainſi (dans le triangle EIL) EL eſt à FM; & que comme GF à FB, ainſi (dans le triangle GBZ) la ligne ZM à MB: Il s'enſuit que EL ſera à FM, comme ZM à MB. Mais la raiſon de EL à

FM

FM, eſt compoſée des raiſons de EL à AL, (c'eſt à dire, GZ à AZ) AL à MB, & MB à FM (c'eſt à dire, BZ ou ſon égale AZ à GZ:) Donc la raiſon de ZM à MB ſera auſſi égale à la compoſée des raiſons de GZ à AZ, AL à MB, & AZ à GZ; c'eſt à dire (parce que les deux raiſons de GZ à AZ, & AZ à GZ ſe détruiſent) égale à la raiſon de AL a MB: Et par conſéquent la ligne AL ſera égale à ZM, c'eſt à dire, à LK; mais comme AL eſt à LK, ainſi AV eſt à VH: Donc AV ſera auſſi égale à VH.

Maintenant, puis que AL eſt égale à LK, & LZ à KM; AZ ou BZ ſera égale à LM; & oſtant le commun ZM, les deux ZL & MB ſeront égales; mais ZL eſt égale à KM: Donc les deux MB & KM ſeront auſſi égales: Et partant dans le triangle HBK la ligne HX ſera égale à XB, & HS à SK; & les deux triangles HKA, QXV ſeront ſemblables; & HK ſera à AK, comme QX à VX; & en permutant HK ſera à QX comme AK à VX, ou à ſon égale LM. Ce qu'il faut remarquer.

De plus, GF eſtant à FB comme ZM à MB, c'eſt à dire, comme LK à KM, ou comme EH à HF; & EI eſtant à IF comme GF à FB, il s'enſuit que EH eſt à HF comme EI à IF: Et partant la ligne IH eſt moyenne Harmonique entre les deux EI & IF.

Davantage, comme GF eſt à FB, ainſi ZM à MB, c'eſt à dire, LK à KM; ou prenant leurs doubles, comme AK à KB, il s'enſuit que AK eſt à KB, comme GF à FB; & partant que la ligne FK eſt paralléle à AE; & par conſéquent les triangles GPE, KHF ſeront ſemblables, & leur baſes PE, HF eſtant égales, les coſtez GP & HK ſeront égaux, auſſi-bien que EG & FK; & AE ſera à EG, comme à KF, c'eſt à dire, comme EI à IF, ou GF à FB, ou EH à HF.

Voilà donc trois lignes AG, BG, & EF; diviſées en raiſons égales aux points EF, & H: elles ſeront donc par la 41. du 3. des

des Coniques d'Apollonius, trois contingentes aux points A, B, & H, d'une mesme Parabole.

Or pour faire voir que la Parabole, dont les diamétres sont OZ & OR, est celle que ces trois lignes touchent aux trois points susdits, je raisonne en cette sorte. La ligne OR estant troisiéme proportionelle Géometrique aux deux OZ & AZ, le rectangle ZOR sera égal au quarré AZ ou BZ; & partant les deux points A & B seront dans la Parabole.

Mais pour montrer que le point H y est aussi, je fais ainsi. La ligne FK estant parallèle à AE dans le triangle AIE, AI sera à IK, comme EI à IF, c'est à dire, dans le triangle EIL, comme LI à IM; & en divisant & permutant AK sera à LM, comme KI à IM, c'est à dire, (dans le triangle HIK) comme KH est à FM. Mais nous avons fait remarquer cy-dessus que HK estoit à QX, comme la mesme AK à LM: Donc la ligne HK aura mesme raison aux deux lignes QX & FM; & partant elles seront égales: & ostant FX commun, les restes QF & XM, ou VL, seront égaux; & par conséquent EV aura mesme raison à QF & à VL. Mais EV est à QF, comme EH est à HF, ou LK à KM, ou AL à LZ: Donc EV sera à VL, comme AL à LZ; & en changeant & composant VL sera à EL, comme LZ à AZ, ou comme le rectangle ZLA au rectangle ZAL (en prenant AL pour commune hauteur.) Mais EL est à GZ, comme AL à AZ, c'est à dire, (en prenant AZ pour commune hauteur) comme le rectangle ZAL au quarré AZ: Donc par égalité VL sera à GZ, comme le rectangle ZLA, ou son égal LKM, au quarré AZ ou BZ; & le double de VL, c'est à dire, HK à GZ, comme le double du rectangle LKM, c'est à dire, LKB au quarré BZ; & HK à la moitié de GZ, c'est à dire OZ, comme le double du rectangle LKB, c'est à dire, le rectangle AKB au quarré BZ. Mais HK est parallèle au diamétre OZ: Donc le point H sera dans la Parabole, dont les diamétres sont OZ & OR.

Il est notore que le sommet estant O, où GZ est divisée en deux également, les deux lignes AG & BG toucheront la mesme Parabole en A & B. Et pour démontrer qu'elle touchera aussi EF en H, je raisonne en cette maniére, aprés avoir tiré la ligne HN parallele à AB, laquelle sera par conséquent ordonnée au diamétre OZ. Parce que FK est paralléle à AE, EI est à IF comme AI à IK, & comme EH à HF, c'est à dire, LK ou ZM à KM; AI sera donc à IK comme ZM à KM; & en divisant AK à IK comme KZ à KM: Et partant le rectangle des moyennes IKZ sera égal au rectangle des extrêmes AKM; & deux fois le rectangle IKZ égal au rectangle AKB; & ajoustant le quarré ZK, deux rectangles IKZ avec le quarré ZK, (c'est à dire, le rectangle IKZ avec le rectangle IZK) égaux au rectangle AKB avec le quarré ZK, (c'est à dire, au quarré BZ:) & partant le rectangle IKZ sera égal au quarré BZ, moins le rectangle IZK; & le rectangle IZK aura mesme raison au rectangle IKZ qu'au quarré BZ, moins le rectangle IZK. Mais le rectangle IZK est au rectangle IKZ comme IZ à IK, c'est à dire, comme PZ à HK: Donc le rectangle IZK sera au quarré BZ, moins le rectangle IZK, comme PZ est à HK. Mais il a esté démontré cy-dessus, que PG estoit égale à HK; donc PZ sera à PG comme le rectangle IZK est au quarré BZ, moins le rectangle IZK; & en changeant & composant GZ sera à PZ, comme le quarré BZ au rectangle IZK. Mais PZ est à PN, comme IZ à HN ou ZK, c'est à dire, comme le rectangle IZK au quarré KZ, où HN: Donc par égalité GZ sera à PN, comme le quarré BZ est au quarrè NH. Mais parce que NH est paralléle à AB, & ordonnée à GZ, le quarré BZ est au quarré NH comme la ligne ZO à ON; il s'ensuit que GZ sera à PN comme ZO à ON; & en permutant GZ à ZO, comme PN à NO; mais GZ est double de OZ: donc PN sera aussi double de NO; & par conséquent la ligne EF touchera la Parabole susdite au point H. Ce qu'il falloit démontrer.

Se-

Second Cas du neuviéme Probléme.

Si les pieds droits AC & BD estans en surplomb, se rencontrent de la part de A & B au point G, (comme en la 2. Fig. de la 6. Planche,) & que la ligne EF, qui détermine la hauteur de l'arc à décrire estant prolongée, rencontre aussi la ligne de la rampe AB, comme en I, en telle sorte que la raison de la ligne EI à IF soit moindre que celle de la ligne GF à FB. *Figure II. de la VI. Planche.*

Aprés avoir divisé la ligne AB en deux également en Z, & mené indéfiniment la ligne GZ, il faut trouver IH moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux EI & IF; & aprés avoir méné les lignes HB & HA, il en faut diviser l'une comme HB en deux également en X, & méner FX, qui rencontrera GZ continüée de la part de Z, comme en Y, ainsi qu'il se verra cy-dessous, d'où il faut méner la ligne EY.

Je dis que la section qui touchera les deux lignes AC & BD en A & B, & la ligne EF, sera une Ellipse, dont Y sera le centre, & le point H celuy où elle touchera la ligne EF. Et que si l'on méne indéfiniment la ligne HY, sur laquelle on prenne YT égale à YH, & qu'aprés avoir tiré la ligne NYM par le point Y paralléle à EF, sur laquelle des points A & B tombent les lignes Aδ & BP paralléles à HY, l'on prenne ϵY moyenne proportionnelle Géometrique entre les deux NY & Yδ, & que l'on fasse Yβ égale à Yϵ; les deux droites HT, & $\epsilon\beta$ seront les diamétres de mesme conjugaison de la susdite Ellipse.

Pour la démonstration, il faut premiérement méner des points E, H, & F sur la ligne AB, les lignes Eμ, Hϕ, & Fη paralléles à GZ, & raisonner en cette maniére. La ligne Eμ est à Fη en raison composée des raisons de Eμ à Aμ, (c'est à dire, GZ à AZ) Aμ à Bη, & Bη à Fη (c'est à dire, BZ ou AZ

 à

à GZ:) Mais les raisons de GZ à AZ, & AZ à GZ se détruisent, & par conséquent Eμ sera à Fη, comme Aμ à Bη. De plus, parce que la ligne HI est moyenne Harmonique entre les deux EI & IF, comme EI est à IF, ainsi EH est à HF, c'est à dire, μφ à φη, & comme EI à IF; ainsi Eμ à Fη, c'est à dire, Aμ à Bη; donc μφ est à φη, comme Aμ à Bη; & en composant Aφ à φB, comme Aμ à Bη, c'est à dire, comme EI à IF. Mais la raison de EI à IF est par l'Hypothese moindre que celle de GF à FB, c'est à dire, Zη à Bη: Donc la raison de Aφ à φB sera moindre que celle de Zη à Bη, & en composant & permutant la raison AB à ZB moindre que celle de φB à Bη; mais AB est double de ZB: Donc φB sera plus grande que le double de Bη, & partant φη plus grande que Bη; & dans le triangle HφB, la ligne Hτ sera plus grande que Bτ; mais BX est égale à HX: donc la ligne BX sera plus grande que la mesme Bτ, & l'angle BFX plus grand que l'angle BFτ, c'est à dire, BGZ; Et partant la ligne FX estant continuëe, rencontrera la ligne GZ continuëe de la part de Z comme au point Y.

Maintenant, aprés avoir méné par le point Y la ligne KYQ paralléle à AB, & tiré du mesme point les deux lignes Yν & Yλ perpendiculaires aux deux BD, AC, je dis que la ligne KQ estant paralléle à AB, elle sera divisée en Y comme AB l'est en Z, c'est à dire, en deux également: Et partant les deux triangles GYK, GYQ seront égaux; & par conséquent ils auront leurs costez en raison réciproque de leurs hauteurs, c'est à dire, que le costé KG du triangle GKY sera au costé QG du triangle GQY, comme la ligne Yν hauteur du triangle GQY à la ligne Yλ hauteur du triangle GKY: Mais comme KG est à QG, ainsi AG est à BG: Donc AG sera à BG comme Yν à Yλ.

De plus, aprés avoir méné les deux lignes AY & BY, dautant que les deux triangles AYE, BYF sont entre eux en raison composée de leurs costez & de leurs hauteurs, la raison du triangle

gle AYE au triangle BYF ſera compoſée des raiſons des lignes AE à BF, & Yλ à Yν, c'eſt à dire, BG à AG. Mais la raiſon de AE à BF eſt encore compoſée de celle des lignes AE à Eμ (c'eſt à dire, AG à GZ) Eμ à Fη, & Fη à BF, (c'eſt à dire, GZ à GB;) la raiſon donc du triangle AYE au triangle BYF ſera compoſée des raiſons de AG à GZ, Eμ à Fη, GZ à GB, & GB à AG; mais les raiſons de AG à GZ, GZ à GB, & GB à AG ſe détruiſent. Il ne reſte donc plus que la raiſon de Eμ à Fη qui ſoit égale à celle du triangle AYE au triangle BYF. Mais comme Eμ eſt à Fη, ainſi EI à IF, ou EH à HF, ou le triangle EYH au triangle FYH: Donc le triangle AYE ſera au triangle BYF, comme le triangle EYH à HYF; & en permutant, le triangle AYE au triangle EYH, comme le triangle BYF au triangle HYF. Mais les deux triangles AYE, EYH ayans une baſe commune EY, ſont entre eux comme les lignes AV & VH; & les deux triangles BYF, HYF ayans une baſe commune FY, ſont auſſi comme BX à XH, il s'enſuit que AV eſt à VH comme BX à XH. Mais BX eſt égale à XH par la conſtruction: Donc AV ſera auſſi égale à VH.

Voilà donc trois lignes AB, AH, & BH qui ſont diviſées également en deux aux points Z, V, & X, par les lignes GZ, EV, & FX, qui partent des points G, E, & F, où les lignes AC, BD, & EF ſe rencontrent, & qui ſe joignent toutes en un meſme point Y, au deſſous du point G vers Z. Et partant ce point Y ſera le centre d'une Ellipſe, qui touchera les trois lignes ſuſdites AC, BD, & EF, aux points A, B, & H.

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes HYT, εYβ en ſont les diamétres de meſme conjugaiſon. Et pour cét effet, il faut continüer la ligne HYT de part & d'autre, juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AC prolongée en χ, & BD en ζ; puis du point E méner la ligne Eς parallèle à AH, & qui coupe la ligne HY prolongée en ς, d'où par le point V il en faut méner une autre ςV ʒ qui coupe la ligne AC en ʒ, & joindre les points Y & ʒ. Semblablement

du point F il faut méner FL paralléle à BH, & qui coupe la mesme YH prolongée en L, d'où par le point X il faut tirer une ligne LXO, qui rencontre BD prolongée en O, & joindre les points Y & O, & enfin tirer les lignes A ψ & BS paralléles à EF, & continüer MN de part & d'autre, afin qu'elle coupe les lignes HB, HA prolongées aux points 7 & 6, & tirer la ligne VX indéfiniment de part & d'autre, afin qu'elle coupe EI au point 9 & MN au point 8.

Cela fait, je raisonne en cette maniére. Dautant que LF est paralléle à BH, & BX est égale à HX, la ligne LF sera à HX, c'est à dire, LY à YH, comme la mesme LF à BX, c'est à dire, comme LO à OX; & par conversion de raison LY sera à LH comme LO à LX; Et partant dans le triangle LYO, la base OY sera paralléle à la ligne HX ou LF : Donc au triangle Y ζ O, la ligne YO sera à LF comme ζY à ζL; & aux triangles semblables YXO, LXF, la mesme YO sera à la mesme LF comme YX à XF, ou comme YH à HL : Et partant ζY sera à ζL comme YH à HL; & en permutant, ζY à HY comme ζL à HL; Mais ζY est à HY comme ζM à MF, & ζL à HL comme ζF à FB : Donc ζM est à MF comme ζF à FB; & en permutant, & par conversion de raison ζM est à MF comme MF à MB. Mais comme ζM est à MF, ainsi ζY est à HY, & MF est à MB, ainsi HY à YS : Donc ζY est à HY comme HY à YS, c'est à dire, que HY est moyenne Géometrique entre les deux ζY & YS : Mais la ligne YT est égale à YH par la construction; Et partant la toute ζT est divisée Harmoniquement aux points H & S, & la ligne ζS est moyenne Harmonique entre les deux ζT ζH, & la ligne ζY moyenne Arithmétique entre les mesmes.

Par mesme raisonnement, & par le moyen de la ligne E ϛ nous démontrerons que la ligne HY est aussi moyenne Géometrique entre les deux χY & Yψ : & que la toute Tχ est aussi divisée Harmoniquement aux points H & ψ, en sorte que la ligne χψ est

moyenne

moyenne Harmonique entre les deux $T\chi$ & $H\chi$, & la ligne χY moyenne Arithmétique entre les meſmes.

D'où il appert que les rectangles $\chi Y \psi$ & $\zeta Y S$ eſtans chacun égal au quarré HY, ils ſeront auſſi égaux entre eux, & ils auront l'un & l'autre meſme raiſon au quarré εY, ou ſon égal $Y\beta$. Mais la raiſon du rectangle $\chi Y \psi$ au quarré εY, ou ſon égal $NY\delta$; eſt compoſée des raiſons des lignes χY à NY (c'eſt à dire, $A\delta$ à $N\delta$) & de $Y\psi$, ou ſon égale $A\delta$ à $Y\delta$, leſquelles font enſemble la raiſon du quarré $A\delta$ au rectangle $N\delta Y$: Donc le rectangle $\chi Y \psi$, ou le quarré HY ſera au quarré εY, comme le quarré $A\delta$ au rectangle $N\delta Y$: Or eſt-il que le rectangle $N\delta Y$ eſt égal au rectangle $\varepsilon\delta\beta$, comme il a eſté tant de fois démontré cy-deſſus: Et partant le quarré $A\delta$ ſera au rectangle $\varepsilon\delta\beta$ comme le quarré HY au quarré εY, ou prenant leurs quadruples, comme le quarré du diamétre HT au quarré du diamétre $\varepsilon\beta$. Mais la ligne $A\delta$ eſtant paralléle au diamétre HY, eſt ordonnée à l'autre diamétre $\varepsilon\beta$: Donc le point A ſera dans l'Ellipſe, dont les deux lignes HT, & $\varepsilon\beta$ ſont les diamétres de meſme conjugaiſon.

Il eſt notoire que le point H eſtant au bout d'un deſdits diamétres, il eſt auſſi dans la meſme Ellipſe. Mais pour prouver que le point B s'y trouve pareillement, il faut diſcourir en cette maniére. Le rectangle $\zeta Y S$ eſt au rectangle MYP en raiſon compoſée des raiſons de ζY à YM, c'eſt à dire, BP à PM, & de YS, ou ſon égale BP à YP, leſquelles compoſent la raiſon du quarré BP au rectangle MPY: Et partant le rectangle $\zeta Y S$, ou ſon égal le quarré HY ſera au rectangle MYP, ou ſon égal le quarré $Y\beta$, ou $Y\varepsilon$ (comme nous le démontrerons cy-deſſous) comme le quarré BP eſt au rectangle MPY, ou à ſon égal $\beta P \varepsilon$ (comme nous le démontrerons auſſi cy-deſſous,) c'eſt à dire, que le quarré BP ſera au rectangle $\beta P \varepsilon$ comme le quarré HY au quarré $Y\varepsilon$; ou prenant leurs quadruples, comme le quarré TH au quarré $\varepsilon\beta$: Mais PB eſtant paralléle au diamétre TH,

eſt

est ordonnée à l'autre diamétre $\epsilon\beta$: Et partant le point B est dans l'Ellipse, dont les lignes HT & $\epsilon\beta$ sont diamétres de mesme conjugaison.

Je dis de plus que cette Ellipse touchera les lignes AC, BD, & EF aux mesmes points A, B, & H: ce qui est premiérement constant par la 6. du 2. des Coniques au regard de la ligne EF, qui est ménée au bout H du diamétre TH paralléle à l'autre diamétre $\epsilon\beta$. Mais pour les deux autres, il faut raisonner en cette sorte. Dautant que la ligne BS est paralléle à $\epsilon\beta$, elle sera ordonné à TH; mais elle divise la ligne Tζ de telle sorte en S, que la ligne ζS soit moyenne Harmonique entre les deux ζT & ζH. Il s'ensuit par la 34. du 1. des Coniques, que la ligne BD touchera en B la susdite Ellipse.

De plus, par la mesme proposition, il appert que la ligne AC la touche en A, parce que l'ordonnée Aψ coupe Tχ en ψ, de telle sorte que $\chi\psi$ soit moyenne Harmonique entre les deux χT & χH.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes HT & $\epsilon\beta$ pour diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse, laquelle touche les trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il ne reste plus qu'à démontrer (comme nous l'avons promis) que le rectangle MYP est égal au quarré Yβ ou Yϵ, c'est à dire, au rectangle NYδ, & le rectangle MPY égal au rectangle ϵPβ; ce qui se fait en cette maniére, aprés avoir fait Iθ égale à IF. Puisque AV est égale à VH, comme BX égale à XH; la ligne VX9 sera paralléle à AB, & H9 égale à I9. Et puis que EH est à HF comme EI à IF, en composant, & permutant, Eθ sera à EF comme IF à HF. Mais comme IF à HF, ainsi EI à EH: Donc Eθ sera à EF, comme EI à EH; & en divisant, prenant la moitié des antécédens, composant, & par conversion de raison, EI sera à IF, c'est à dire, EH à HF comme E9 & à H9; & en permutant, changeant, & par conversion de raison E9 sera à H9 comme H9 à F9. Or

Or dans les triangles semblables HX 9 & 7 X 8, comme H 9 est à F9, ainsi 78 est à Y8: Et dans les triangles semblables EV9, YV8, comme E9 est à H9, ainsi Y8 est à 68: Donc 78 sera à Y8 comme Y8 à 86, & en la mesme raison de E9 à H9. Mais comme E9 à H9, ainsi EH à HF, c'est à dire, 2Y à YR; & comme 78 à Y8, ainsi 7Y à Y6: Donc 7Y est à Y6 comme 2Y est à YR; & le rectangle des extrêmes 7YR est égal au rectangle des moyennes 6Y2.

De plus, parce que ζY est à HY comme HY à SY, par conversion de raison ζY sera à ζH comme HY à HS: Mais comme ζY est à ζH, ainsi MY est à HF, ou YR; & comme HY à HS, ainsi 7Y est à BS ou YP: Donc MY sera à YR comme 7Y à YP; & le rectangle des moyennes 7YR est égal à celuy des extrêmes MYP.

Par le mesme raisonnement nous ferons voir que le rectangle 6Y2 est égal au rectangle NYδ. Et partant le rectangle 7YR est au rectangle MYP comme 6Y2 à NYδ; & en permutant 7YR estant égal à 6Y2, le rectangle MYP sera aussi égal au rectangle NYδ, c'est à dire, par la construction, au quarré ιY ou βY. Et partant si de l'un & de l'autre on oste le commun quarré YP, le rectangle MPY demeurera égal au rectangle ιPβ. Qui est ce qu'il falloit démontrer.

Le cercle pourroit résoudre ce Cas de ce Probléme, ainsi que nous avons dit cy-dessus du 8e, si les deux lignes AG & BG se trouvant égales aussi-bien que les trois AY, BY, & HY; ces trois lignes se trouvoient encore perpendiculaires aux trois AC, BD, & EF, chacune à la sienne.

Troisiéme Cas du neuviéme Probléme.

Enfin, si les pieds droits AC & BD estans en surplomb, se rencontrent, estans prolongez de la part de A & B, au point G (comme en la 2. Figure de la 7. Planche) & que la ligne EF, qui

Figure II. de la VII. Planche.

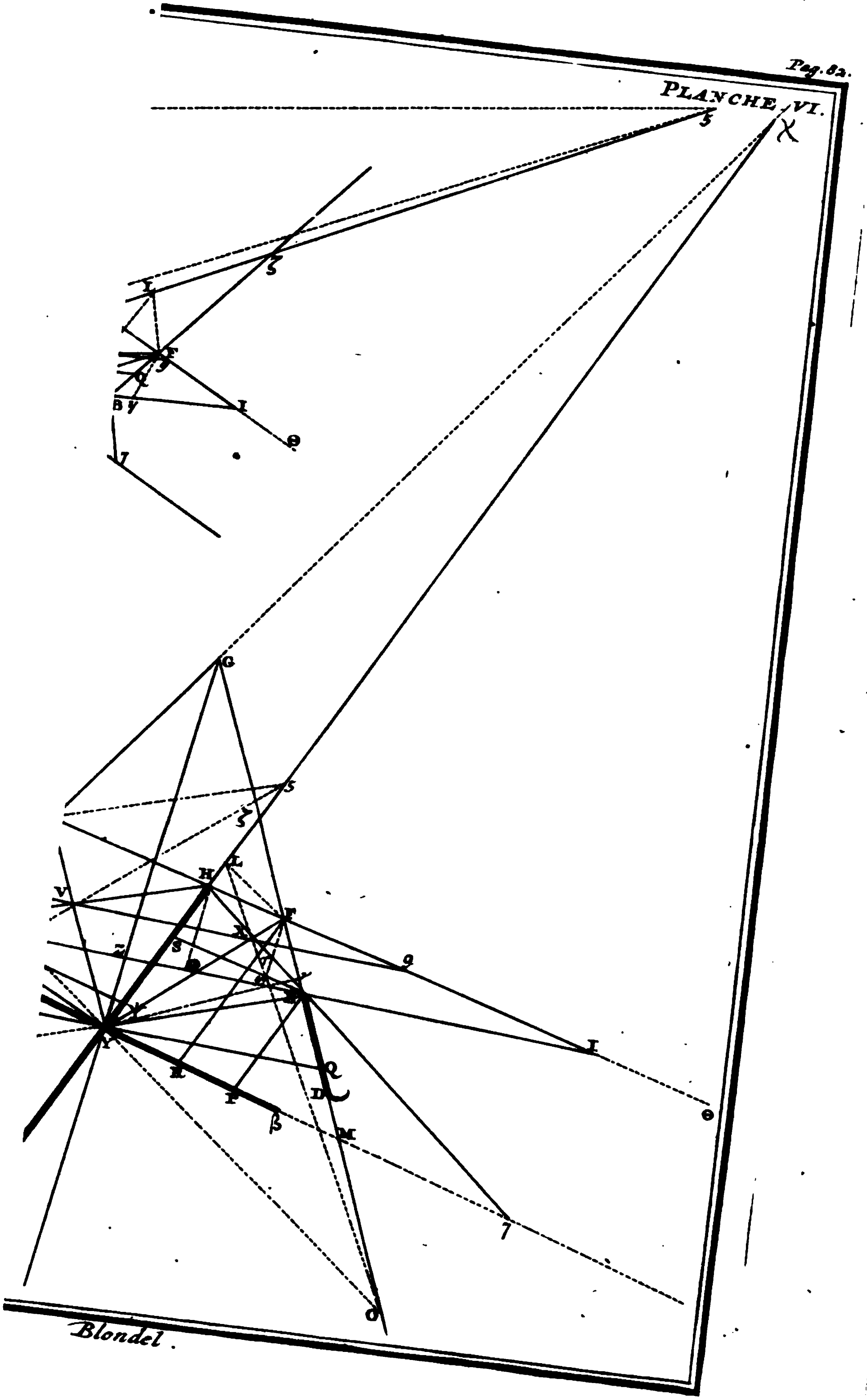
qui détermine la hauteur de l'Arc à décrire, rencontre aussi la ligne de la rampe AB, comme en I, de telle sorte que la raison de la ligne EI à IF soit plus grande que celle de FG à FB. Aprés avoir divisé la ligne AB en deux également en Z, & mené la ligne GZ indéfiniment de la part de G; il faut trouver IH moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux EI & IF; & aprés avoir mené les lignes HB, HA, il en faut diviser l'une, comme HB, en deux également en X, & mener FX indéfiniment de la part de F, qui rencontrera GZ au dessus du point G comme en Y (ainsi qu'il se verra cy-dessous) d'où il faut mener YEV.

Je dis que la section qui touchera les deux lignes AC & BD aux points A & B, & la ligne EF; sera une Hyperbole, dont le centre sera au point Y; & le point H celuy où elle touchera la ligne EF; & que si l'on mène indéfiniment la ligne HY, sur laquelle on prenne YT égale à YH; & qu'aprés avoir tiré par le point Y la ligne MN parallèle à EF, sur laquelle des points A & B tombent les lignes Aδ & BP parallèles à HY; l'on prenne εY moyenne proportionnelle Géometrique entre les deux NY & Yδ, & que l'on fasse Yβ égale à εY : les deux droites HT & εβ seront les diamétres de mesme conjugaison de la susdite Hyperbole.

La démonstration s'en fait en la mesme maniére, & presque aux mesmes termes que celle de la précédente proposition pour l'Ellipse; & pour ce sujet, il faut premiérement mener des points E, H, & F sur la ligne AB les lignes Eμ, Hφ, & Fη parallèles à GZ, & argumenter en cette sorte. La ligne Eμ est à Fη en raison composée de celles de Eμ à Aμ, (ou GZ à AZ,) Aμ à Bη, & Bη à Fη, (ou BZ, ou AZ à GZ.) Mais la raison de GZ à AZ détruit celle de AZ à GZ; & partant la raison de Eμ à Fη sera égale à celle de Aμ à Bη. De plus, parce que IH est moyenne Harmonique entre les deux EI & IF; la ligne EH sera à HF, ou μφ à φη, comme EI à IF, ou

Eμ

PLANCHE VI.



Eμ à Fν, ou Aμ à Bν: Donc Aμ sera à Bν comme μφ à φν; & la toute Aφ à la toute φB comme la partie μφ à la partie φν, c'est à dire comme EI à IF. Mais la raison de EI à IF est par l'hypothese plus grande que celle de GF à FB, ou Zν à Bν: Donc la raison de Aφ à Bφ sera plus grande que celle de Zν à Bν; & en composant & permutant, celle de AB à ZB plus grande que celle de φB à Bν. Mais AB est double de ZB: Donc φB sera moindre que double de Bν; c'est à dire, que φν sera moindre que νB; & dans le triangle HφB, Hτ sera moindre que τB; & partant τB plus grande que BX, & l'angle BFτ, ou BGZ plus grand que l'angle BFX, ou GFY: Et partant la ligne XF rencontrera la ligne ZG continüée au dessus de G, comme au point Y.

Maintenant, aprés avoir méné par le point Y la ligne KYQ paralléle à AB, & tiré du mesme point les deux lignes Yν & Yλ perpendiculaires aux deux lignes ACG, & BDG prolongées; je dis que la ligne KQ estant parallèle à AB, elle sera divisée en Y en la mesme raison que AB l'est en Z, c'est à dire en deux également: Et partant les triangles GYK, GYQ seront égaux; & ils auront par conséquent les costez reciproques de leurs hauteurs, c'est à dire, que le costé GK du triangle GKY sera au costé GQ du triangle GQY, comme Yν hauteur de GQY à Yλ hauteur de GKY; Mais comme KG est à GQ, ainsi AG est à GB: Donc AG est à GB comme Yν est à Yλ.

De plus, aprés avoir méné les deux lignes AY & BY; dautant que les deux triangles AYE, BYF sont entre eux en raison composée de celles de leurs costez, & de leurs hauteurs; le triangle AYE sera à BYF en raison composée du costé AE au costé BF, & de la hauteur Yλ à la hauteur Yν, c'est à dire, de la ligne BG à AG. Mais la raison de AE à BF est encore composée de celles de AE à Eμ, (ou AG à GZ,) Eμ à Fν, & Fν à FB, (ou GZ à GB;) Donc la raison du triangle AEY au

au triangle BFY sera composée de celles de AG à GZ, Eμ à Fη, GZ à GB, & GB à AG. Mais les raisons de AG à GZ, GZ à GB, & GB à AG se détruisent: Donc le triangle AEY sera à BFY comme la ligne Eμ est à Fη, ou comme EI à IF, ou EH à HF, ou enfin comme le triangle EYH au triangle FYH; & en permutant le triangle AEY sera au triangle HEY comme le triangle BFY au triangle FYH. Mais parce que les deux triangles AVY, VHY sont entre eux comme AV est à VH, aussi-bien que les deux triangles AEV, EVH, les restes, sçavoir les triangles AEY, EHY seront aussi entre eux comme AV est à VH. Par mesme raison nous montrerons que le triangle BFY est au triangle FHY comme BX est à XH: Donc AV sera à VH comme BX est à XH; mais celles-cy sont égales par la construction, & partant AV sera aussi égale à VH.

Voilà donc trois lignes AB, AH, & BH, qui sont divisées en deux également aux points Z, V, & X par les lignes GZ, EV, FX, qui partant des points G, E, & F, où les lignes AC, BD, & EF se rencontrent, se joignent toutes au dessus de G en un mesme point Y: Donc le point Y sera le centre d'une Hyperbole qui touchera les susdites trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H.

Il faut maintenant faire voir que les deux lignes HT & ιβ en sont les diamétres de mesme conjugaison. Et pour ce sujet il faut continüer la ligne YH, qui rencontrera AC prolongée au point χ, & BD en ζ; puis du point F mener FL parallèle à BH, & qui coupe YH en L, par où du point X il faut méner la ligne XL, & la continüer jusqu'à ce qu'elle coupe BG prolongée en O, & joindre les points Y & O. En la mesme maniére du point E il faut méner Eϛ, parallèle à AH, qui rencontre YH en ϛ, par où du point V il faut tirer la ligne Vϛ, & la continüer jusqu'à ce qu'elle rencontre AG continüée au point ȝ, & joindre Y & ȝ; & enfin méner Aψ, & BS paralléles à EF ou MN, & continüer MN de part & d'autre jusqu'à ce qu'elle coupe les lig-

lignes AH, BH prolongées aux points 6 & 7, & tirer la ligne VX, en sorte qu'elle coupe EI au point 9, & MN au point 8.

Cela fait, je raisonne en cette maniére. Parce que HX est égale à BX, la ligne LF aura mesme raison à l'une & l'autre; c'est à dire, qu'au triangle HYX, la ligne LF sera à HX comme LY à YH; & au triangle XOB, LF sera à BX comme LO à OX; & partant LY sera à YH comme LO à OX; & en divisant & permutant, LY à LO comme LH à LX: Donc les triangles OLY, HLX seront semblables, & la base OY paralléle à HX ou LF. Et par conséquent aux triangles semblables O ζ Y, L ζ F, la ligne OY est à LF comme Yζ à ζL; & dans les triangles semblables OXY, LXF, la mesme OY est à la mesme LF comme OX à XL; & partant ζY est à ζL comme OX à XL, c'est à dire, comme YH à HL; & en permutant, ζY est à YH comme ζL à HL; Mais comme ζY à YH, ainsi ζM à MF, & comme ζL à HL, ainsi ζF à FB: Donc ζM est à MF, comme ζF à FB; & en permutant, changeant, composant, & changeant ζM sera à MF, (c'est à dire, ζY à YH,) comme MF à MB, c'est à dire, YH à YS. Voilà donc la ligne YH moyenne Géometrique entre les deux ζY & YS; mais la ligne YT a esté prise égale à la mesme YH: Donc la toute TS sera divisée Harmoniquement aux points H & ζ; & la ligne ζS sera moyenne Harmonique entre les deux TS & SH; & SY moyenne Arithmétique entre les mesmes.

Par mesme raisonnement, & par le moyen de la ligne Eſ nous démontrerons que la mesme YH sera aussi moyenne Géometrique entre les deux χY & ψY; & que la toute Tψ est divisée Harmoniquement aux deux points H & χ, & la ligne ψχ moyenne Harmonique entre les deux Tψ & ψH; & ψY moyenne Arithmétique entre les mesmes.

D'où il appert que les rectangles χYψ & ζYS estans chacun égal au quarré HY, ils seront aussi égaux entre eux; & le quarré HY sera au quarré εY, ou à son égal le rectangle NYδ, comme le rectangle χYψ au même rectangle NYδ. Mais la raison

 du

du rectangle $\chi Y \psi$ au rectangle $N Y \delta$ est composée de celles des lignes χY à NY, c'est à dire, $\chi\psi$ à $A\psi$, & ψY à $Y\delta$, ou à son égale $A\psi$; qui composent la raison du rectangle $\chi Y \psi$ au quarré $A\psi$: Donc le quarré YH sera au quarré ϵY, ou (prenant leurs quadruples,) le quarré du diamétre TH sera au quarré du diamétre $\epsilon\beta$, comme le rectangle $\chi\psi Y$ au quarré $A\psi$. Mais le rectangle $\chi\psi Y$ est égal au rectangle $T\psi H$ (comme nous le démontrerons cy-dessous.) Et partant le rectangle $T\psi H$ est au quarré $A\psi$, comme le quarré TH au quarré $\epsilon\beta$. Et comme la ligne $A\psi$ est paralléle à MN ou $\epsilon\beta$, elle est ordonnée au diamétre TH: Et partant le point A est dans l'Hyperbole dont TH & $\epsilon\beta$ sont diamétres de mesme conjugaison.

Il est constant que le point H estant au bout d'un des diamétres susdits, il est aussi dans la mesme Hyperbole. Mais pour prouver que le point B s'y trouve aussi, il faut discourir de cette sorte. Le rectangle $\zeta Y S$ est au rectangle MYP, en raison composé de celles des lignes ζY à MY, (ou ζS à BS,) & YS à YP, ou BS; lesquelles composent aussi la raison du rectangle $\zeta S Y$ au quarré BS: Et partant le rectangle $\zeta Y S$, ou son égal le quarré YH sera au rectangle MYP, ou son égal le quarré ϵY (comme nous le démontrerons cy-dessous,) comme le rectangle $\zeta S Y$ au quarré BS. Mais nous ferons aussi voir cy-dessous, que le rectangle $\zeta S Y$ est égal au rectangle TSH; Et partant comme le quarré YH au quarré ϵY, ou (prenant leurs quadruples,) comme le quarré du diamétre TH au quarré du diamétre $\epsilon\beta$, ainsi est le rectangle TSH au quarré BS: mais la mesme BS estant paralléle à $\epsilon\beta$, est ordonnée à TH: Donc le point B est aussi dans l'Hyperbole, dont les deux droites TH & $\epsilon\beta$ sont diamétres de mesme conjugaison.

Je dis de plus, que cette Hyperbole touchera les lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H. Ce qui est premiérement constant pour le point H, par la 6. du 2. des Coniques, la ligne EF estant ménée au bout d'un des diamétres

HT,

HT, & paralléle à l'autre εβ. Mais pour les deux autres points, je le démontre en cette maniére.

Dautant que la ligne Aψ ordonnée au diamétre TH, le coupe en ψ de telle sorte que χψ soit moyenne Harmonique entre les deux Tψ & Hψ; la ligne ACχ touchera la susdite Hyperbole au point A par la 34. du 1. des Coniques d'Apollonius. Et par la mesme proposition, & le mesme raisonnement, la ligne BDζ touchera la mesme Hyperbole au point B, d'ou la ligne BS est ordonné au diamétre TH, & le coupe au point S, en telle sorte que la ligne ζS soit moyenne Harmonique entre les deux TS & SH.

Nous avons donc trouvé le point Y pour centre, & les deux lignes TH, & εβ pour diamétres de mesme conjugaison d'une Hyperbole, qui touchera les trois lignes AC, BD, & EF aux points A, B, & H. Ce qu'il falloit faire.

Il faut maintenant démontrer que le rectangle χψY est égal au rectangle TψH, ce qui se fait ainsi. Parce que ψY est à YH, ou TY, comme TY à Yχ; en composant, & par conversion de raison Tψ sera à ψY comme χT à TY, ou HY; & en permutant, & par conversion de raison Tψ sera à ψχ comme ψY à ψH: Et partant le rectangle des moyennes χψY sera égal à celuy des extrêmes TψH.

Par mesme raisonnement, on peut voir que le rectangle ζSY est aussi égal au rectangle TSH. De sorte qu'il ne reste plus qu'à montrer, que le rectangle MYP est égal au quarré Yβ, ou εY, c'est à dire, au rectangle NYδ. Ce qui se fait en cette maniére. Parce qu'il a esté démontré cy-dessus dans la précédente proposition, que la ligne E9 estoit à H9 comme H9 est à F9; & que dans les triangles semblables HX9, 7X8, la ligne H9 est à F9 comme 78 est à 8Y; & dans les triangles semblables EV9, YV8, la ligne E9 est à H9 comme 8Y est à 86: Il s'ensuit que 78 est à 8Y comme 8Y est à 86, & en la mesme raison de E9 à H9, c'est à dire, de EH à HF, ou de 2Y à YR. Mais com-

comme 78 eſt à 8 Y, ainſi 7 Y à Y 6: Donc 7 Y ſera à Y 6 comme 2 Y à Y R; & le rectangle des extrêmes 7 Y R ſera égal à celuy des moyennes 6 Y 2.

Maintenant, comme ζY eſt à H Y, ainſi H Y à Y S; en diviſant ζY ſera à ζH comme H Y à H S. Mais comme ζ Y à ζ H, ainſi M Y à F H, ou ſon égale Y R; & comme H Y à H S, ainſi 7 Y à B S, ou ſon égale Y P: Donc M Y ſera à Y R comme 7 Y à Y P; & le rectangle des moyennes 7 Y R ſera égal à celuy des extrémes M Y P.

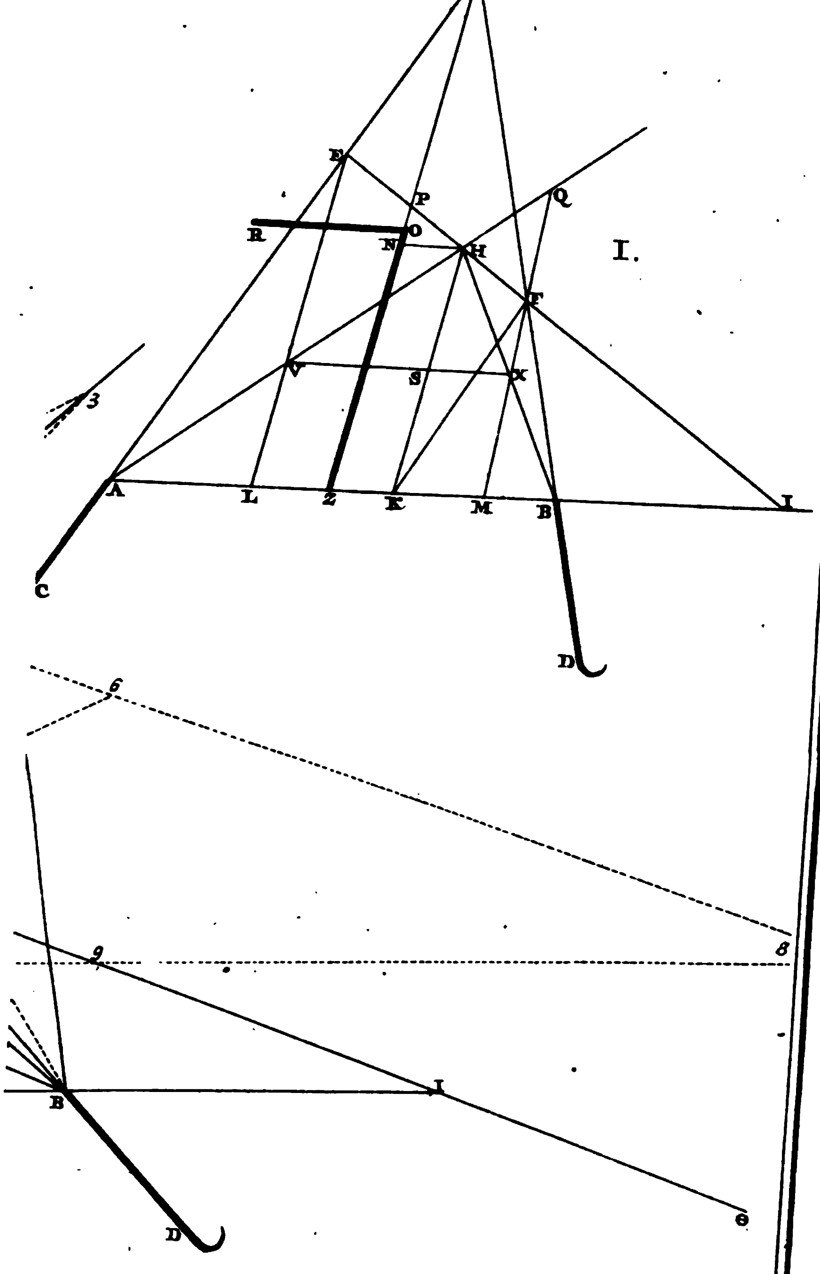
Par meſme diſcours on fera voir que le rectangle 6 Y 2 ſera égal au rectangle N Y δ. Et partant le rectangle 7 Y R eſt à M Y P comme 6 Y 2 à N Y δ; & en permutant comme le rectangle 7 Y R eſt égal au rectangle 6 Y 2, ainſi M Y P ſera égal à N Y δ, ou au quarré ε Y, ou β Y. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIEME OBSERVATION.

DANS les neuf Problémes cy-deſſus, la difficulté de la préparation dont nous avons parlé au commencement de ces Diſcours eſt compriſe, & de ce qu'il faut faire avant que l'on puiſſe ſe ſervir du Probléme de Pappus; c'eſt à dire, de trouver les diamétres de meſme conjugaiſon de la ſection qui doit toucher les lignes des pieds droits aux points donnez.

Mais parce que, ſans parler de la ligne qui détermine la hauteur, on pourroit propoſer un Arc à décrire, qui paſſant par un point donné, toucheroit deux pieds droits en deux autres points auſſi donnez; & qu'en ce cas les Ouvriers ſe pourroient trouver embarraſſez, qui ne ſcauroient pas que l'on puſt facilement, par ce point donné, mener cette ligne que nous avons ſuppoſé dans les propoſitions cy-deſſus, pour déterminer la hauteur de l'Arc à décrire, & avec cét avantage, que ce ſera en ce meſme point que ſe fera l'attouchement de l'Arc & de la Ligne ſuſdite.

PLANCHE VII.



Il m'a ſemblé à propos de le faire voir, & d'en donner les pratiques dans ce Diſcours, par une propoſition univerſelle, en cette ſorte.

PROBLEME.

Ayant à décrire un Arc rampant par un point donné, & entre deux pieds droits, qu'il touche en deux autres points auſſi donnez. Trouver la ligne droite, qui détermine la hauteur de l'Arc; c'eſt à dire, la ligne qui doive toucher l'Arc au ſuſdit premier point donné.

Les deux pieds droits (dans les Figures de la 8. 9. & 10. Planche) ſoient AC, & BD, paralleles, ou non paralleles, & le point donné H, par lequel il faut décrire un Arc rampant, qui touche AC en A, & BD en B. Qu'il faille trouver la ligne EHF, qui détermine la hauteur de cét Arc, en ſorte qu'il la touche au meſme point H. *Planches VIII. IX & X.*

Aprés avoir tiré la ligne de la rampe AB, & continüé les pieds droits AC & BD, en ſorte qu'ils ſe rencontrent au point G, s'ils ne ſont point paralleles; il faut de l'un des points A ou B, par le point H, tirer une droite comme BH, & alors.

PREMIERE PROPOSITION.

Si les pieds drois ſont paralleles (comme aux Figures 1. & 2. de la 8. Planche) la ligne BH rencontrera l'autre pied droit AC prolongé au point K; auquel cas il faut diviſer la ligne AK en deux également en E, & méner par le point H la droite EHF, qui ſera celle que l'on cherche; parce que, ou elle ſera parallèle à la rampe AB, (comme en la 1. Figure) ou elle la rencontrera, eſtant prolongée comme en I, (en la 2. Figure.) *Figures I. II. de la VIII. Planche.*

Premier Cas.

Figure I. de la VIII. Planche.

Puis que dans le triangle AKB (Figure 1. de la 8. Planche) la ligne EH a esté ménée parallèle à la base AB, le costé AK sera à KE comme AB est à EH; Mais AK a esté faite double de KE; & partant la ligne AB, ou son égale EF, sera aussi double de la mesme EH; & la section, qui passant sur le point H, touchera les deux lignes droites AC, & BD aux points A & B; touchera aussi la ligne EF au mesme point H; & cecy tombe dans la solution du 4. Probléme cy-dessus.

Second Cas.

Fig. II. de la VIII. Planche.

C'est à dire, lors que la ligne EF (Figure 2. de la 8. Planche) rencontre la ligne AB prolongée en I; parce que les deux lignes AE, & EK sont égales, elles auront mesme raison à la ligne BF; qui leur estant paralléle, il s'ensuivra qu'aux triangles EKH, BHF, la ligne EK sera à BF, c'est à dire, EH à HF, comme dans le triangle AIE, la ligne AE à la mesme BF; c'est à dire, EI à IF: Et partant la ligne EI se trouvera coupée Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne IH sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes EI & IF: Et par conséquent la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la ligne EF au mesme point H: Et cecy tombe dans la solution du 5. Probl.

SECONDE PROPOSITION.

Figures III. IV. de la VIII. Planche.

Si les pieds droits estans en talu, se rencontrent en G au dessous de la rampe AB (Figures 3. & 4. de la 8. Planche;) & la ligne tirée du point B par H est paralléle à l'autre pied droit AC; il

il ne faut que prendre sur GA prolongée une ligne AE égale à AG, & mener la ligne EHF, qui sera paralléle à la rampe AB (comme en la 3. Figure,) ou bien elle la rencontrera, comme en I. (en la 4. Figure.)

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 3. de la 8. Planche,) parce que dans le triangle EGF, la ligne AB est supposée parallèle à la base EF; la ligne GA sera à AE comme GB à BF; Et parce que dans le mesme triangle EFG, la ligne BH est paralléle à la base EG; la ligne GB sera à BF comme EH est à HF; Et partant, par égalité, la ligne GA sera à AE comme EH à HF; mais GA est égale à AE: Donc EF sera divisée en deux également en H; Et comme elle est paralléle à la rampe AB, la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la mesme EF en H. Et cecy tombe dans la solution du 6. Probl. *Fig. III. de la VIII. Planche.*

Second Cas.

Au second Cas, c'est à dire, lors que la ligne EF estant prolongée, rencontre la rampe AB, comme en I; (Figure 4. de la 8. Planche,) il faut discourir en cette maniére, aprés avoir mené par le point E la ligne OEP paralléle au costé BD, & qui rencontre la rampe en O, & la ligne BH prolongée en P. Parce que les triangles AEO, AGB sont semblables, à cause des paralléles EO, & BG, & des angles au sommet A; ils seront aussi égaux, à cause de l'égalité des costez AE, & AG; & partant les autres costez EO, & BG seront aussi égaux: Mais BG est égale à EP, estant paralléles, & entre paralléles: Donc EO sera égal à EP; & EO sera à EF, (c'est à dire, dans le triangle EIO, la ligne EI à IF,) comme EP à la mes- *Fig. IV. de la VIII. Planche.*

mesme BF, c'est à dire, dans les triangles semblables EHP, BHF, comme la ligne EH à HF: Et partant la ligne EI sera divisée. Harmoniquement aux deux points H & F, & la ligne IH sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes EI & IF: Et par conséquent la section, qui passant par le point H, touchera les pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la mesme EF au point H. Et cecy tombe dans la solution du 8. Probl.

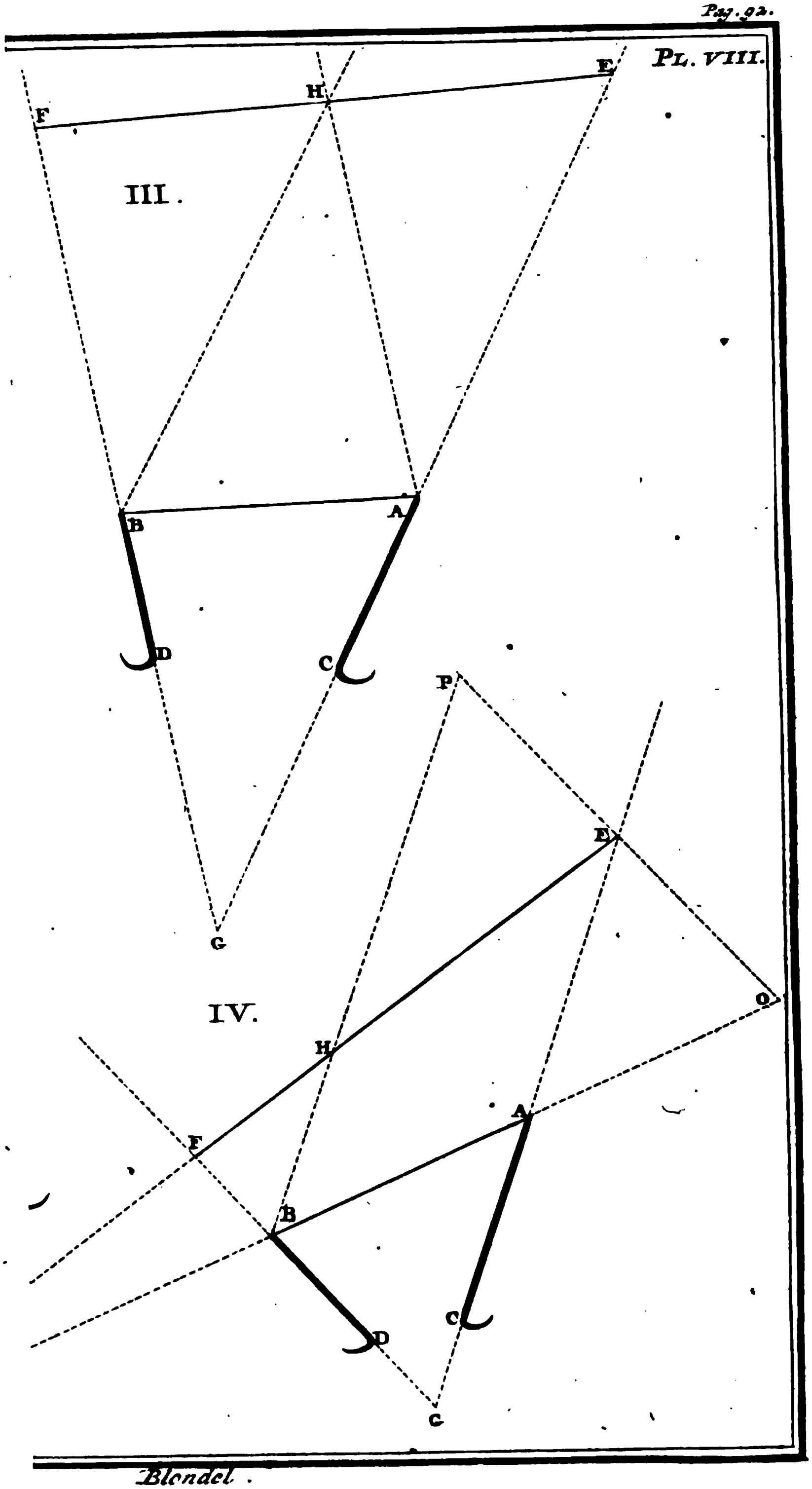
TROISIEME PROPOSITION.

Fig. I.& II. de la IX. Planche.

Si les pieds droits estant en talu & se rencontrant en G au dessous de la rampe AB, la ligne tirée du point B par le point donné H, coupe le costé AC prolongé en K; (Figures 1. & 2. de la 9. Planche,) il faut premiérement couper la ligne AK en deux également au point L, par lequel il faut méner LM parallèle à BK & égale à AL ou LK; & du point G par M tirer la droite GM jusqu'en N, où elle rencontrera la ligne BK prolongée; puis faire KE égale à KN, & du point E par H méner la ligne EHF, & raisonner en cette maniére. Comme au triangle KGN, la ligne LM est paralléle à la base KN; la mesme LM sera à KN, c'est à dire, AL à KE, comme GL à GK; & prenant les doubles des antécédens, AK sera à KE comme AG & GK ensemble à GK; & en divisant AE sera à KE comme AG à GK; & en permutant, & changeant GK sera à KE comme AG à AE; & la toute GK sera divisée Harmoniquement aux deux points E & A, en sorte que la ligne AK soit la moyenne proportionnelle Harmonique entre les deux extrêmes GK & KE.

Maintenant, ou la ligne tirée du point E par H, sera paralléle à la rampe AB, (comme en la 5. Figure,) ou elle la rencontrera, comme en I, (en la 6. Figure.)

Pre-



Blondel.

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 9. Planche:) Aprés avoir mené par le point E la ligne OP paralléle au pied droit BD, & rencontrant la rampe en O, & la ligne BH prolongée en P; je dis que la ligne EP dans le triangle GKB, ayant esté tirée paralléle à la base GB, le costé GK sera à KE comme GB à EP; & dans les deux triangles semblables GAB, EAO, la ligne GA sera à AE comme la mesme GB est à EO. Mais parce que GK est à KE comme GA est à AE; il s'ensuit que GB sera à PE comme la mesme GB est à EO; & que les deux lignes EP & EO ou BF seront égales; & que dans les triangles semblables EHP, BHF, les deux costez EH & HF seront égaux; & la ligne EF sera divisée en deux également en H; & comme elle est paralléle à la rampe AB, la Section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC & BD en A & B, touchera aussi la ligne EF en H. Et cecy tombe dans la solution du 6. Probl.

Figure I. de la IX. Planche.

Second Cas.

Au second Cas (Figure 2. de la 9. Planche;) c'est à dire, lors que la ligne EF rencontre la ligne AB prolongée comme en I: Aprés avoir comme dessus mené la ligne OEP paralléle au pied droit BD, & coupant les lignes AB en O, & BH en P; je dis que dans le triangle GKB, la ligne EP ayant esté ménée paralléle à la base GB; la ligne GK sera à KE comme GB à EP; mais celle-cy est composée des raisons de GB à BF, & de BF à EP, c'est à dire, FH à HE: il s'ensuit que la raison de GK à KE sera égale aux raisons de GB à BF, & de FH à HE. De plus, les triangles GAB, EAO estant semblables, aussi-bien que BIF, OIE; la ligne GA sera à AE, comme GB est à EO, c'est à

Figure II. de la IX. Planche.

 dire,

dire, en raison composée de GB à BF, & de BF, EO, c'est à dire, FI à EI. Mais il a esté démontré que la raison de GK à KE estoit égale à celle GA à AE: Donc la raison composée de GB à BF, & de FH à HE, sera égale à celle de la mesme GB à BF, & de FI à IE: ostant donc la raison commune de GB à BF, la raison de FI à IE sera égale à celle de FH à HE; & la ligne IF sera divisée Harmoniquement aux deux points E & H, & la ligne IH sera la moyenne Harmonique entre les deux extrêmes IF & IE: Et par conséquent la Section, qui passant par le point H touchera les deux pieds droits AC en A & BD en B, touchera aussi la ligne EF en H. Et cecy tombe dans la solution du 8. Probléme.

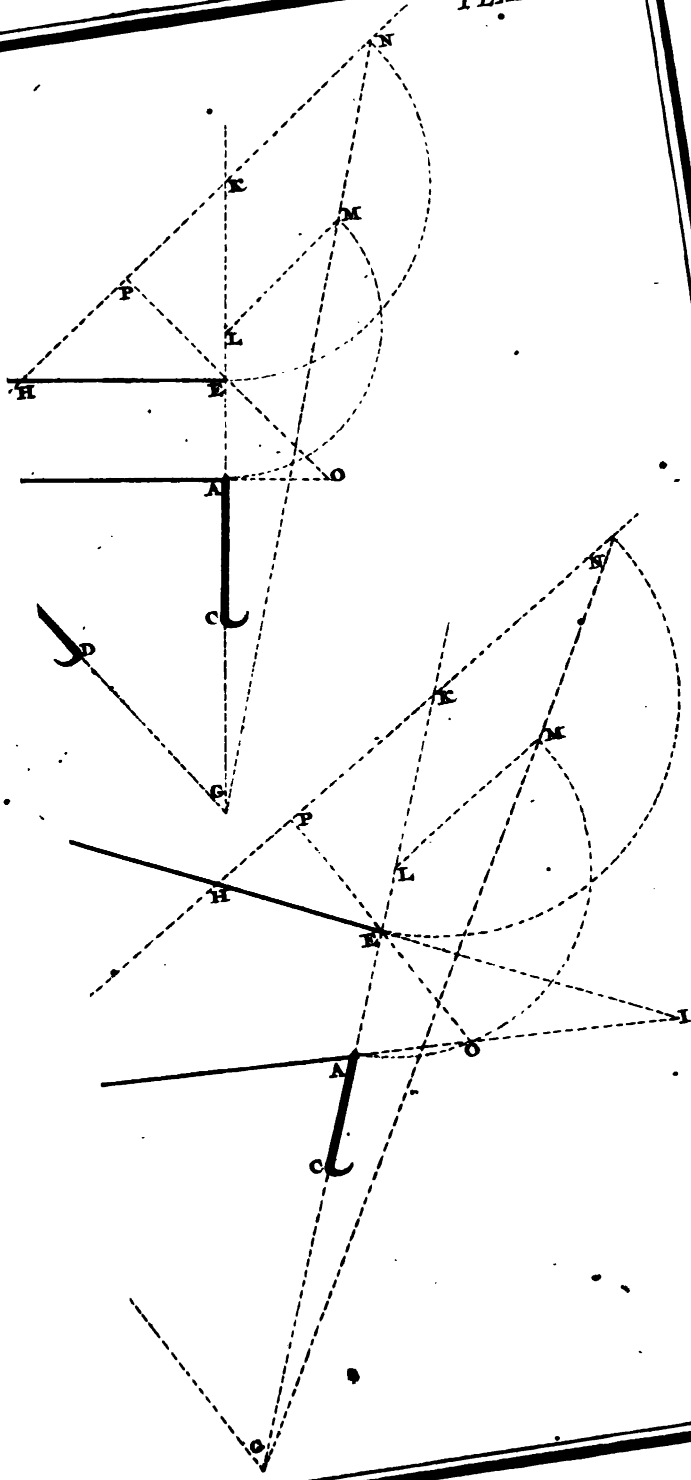
QUATRIEME PROPOSITION.

Fig. I. II. III. de la X. Planche.

Si les pieds droits, estant en surplomb, se rencontrent au dessus de la rampe au point G (comme aux Figures 1. 2. & 3. de la 10. Planche,) il faudra du point B par H mener indéfiniment une droite BH, qui coupe l'autre pied droit AC en K; & aprés avoir divisé la ligne AK en deux également en L, & mené LM parallèle à BH, & égale à AL; il faut joindre les deux points GM par une droite, qui coupe la mesme BH prolongée en N, & faire KE égale à KN; & par le point E tirer OP parallèle à BD, & rencontrant les lignes AB & BH en O & P. Ensuite nous dirons que LM estant parallèle à KN, LG est à GK comme LM est à KN, c'est à dire, AL à KE; & prenant les doubles des antécédens AG & GK ensemble seront à GK comme AK à KE; & en divisant AG à GK comme AE à EK; & en permutant AG est à AE comme GK à EK: Et partant la ligne AG est divisée Harmoniquement aux deux points E & K, & la ligne AK est moyenne Harmonique entre les deux extrêmes AG & AE. Maintenant, si l'on tire du point E par H une droite EF, elle sera parallèle à la rampe AB, (comme en la 1. Figure,) où elle la rencontrera comme en I. aux 2. & 3. Figures.

Pre-

PLANCHE IX.



Blondel.

Premier Cas.

Au premier Cas (Figure 1. de la 10. Planche.) Parce qu'aux triangles semblables GAB, EAO, la ligne GA est à AE comme GB est à EO; & aux triangles semblables GKB, EKP, la ligne GK est à KE comme la mesme GB est à EP; la raison de GA à AE estant égale à celle de GK à KE; il s'ensuit que la raison de GB à EO sera aussi égale à celle de GB à EP, & que la ligne EO, ou son égale FB sera égale à la ligne EP; & qu'aux triangles semblables EHP, FHB, les deux lignes EH & HF sont égales; & la ligne EF divisée en deux également en H; & comme elle est parallèle à la rampe AB, la Section qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC en A & BD en B, touchera aussi la ligne EF en H. Et cecy tombe dans la solution du 7. Probl.

Fig. I. de la X. Planche.

Second Cas.

Au second Cas, c'est à dire, lors que la ligne EF coupe la rampe AB en I, soit de la part de A (comme en la 2. Figure,) ou de la part de B (comme en la 3. Figure de la 10. Planche;) je dis que la raison de GA à AE estant la mesme que celle de GB à EO; & celle-cy estant composée des raisons de GB à BF & de BF à EO, c'est à dire, de IF à IE; la raison de GA à AE sera composée des raisons de GB à BF, & IF à IE. De mesme la raison de GK à KE estant la mesme que celle de GB à EP, & celle-cy estant égale aux deux raisons de GB à BF & BF à EP, c'est à dire, FH à HE; la raison de GK à KE sera composée des raisons de GB à BF & de FH à HE: mais GA est à AE comme GK à KE; Et partant la composée de GB à BF & IF à IE, sera égale à la composée de GB à BF, & FH à HE; & ostant la raison commune de GB à BF,

Figures II. & III. de la X. Planche.

BF, les deux autres IF à IE, & FH à HE feront égales, & la ligne FI (dans la 2. Figure) sera divisée Harmoniquement aux points E & H; & la ligne EI (dans la 3. Figure) aux points F & H: Et en l'une & en l'autre la ligne IH sera moyenne Harmonique entre les deux extrêmes EI & IF. Et partant la Section, qui passant par le point H, touchera les deux pieds droits AC en A, & BD en B, touchera aussi la droite EH au point H. Et cecy tombe dans la solution du 9. Probl.

Voilà donc la résolution de tous les Cas qui peuvent estre considerez sur cette matiére; où il paroist qu'il faut que le point donné se trouve entre les lignes des pieds droits, si l'on veut rendre la question possible; parce que l'Arc, qui partant des points A & B de la rampe, passeroit par un point posé hors les lignes AC, & BD prolongées, couperoit nécessairement cesdites lignes, & par conséquent il ne les pourroit pas toucher aux points A & B.

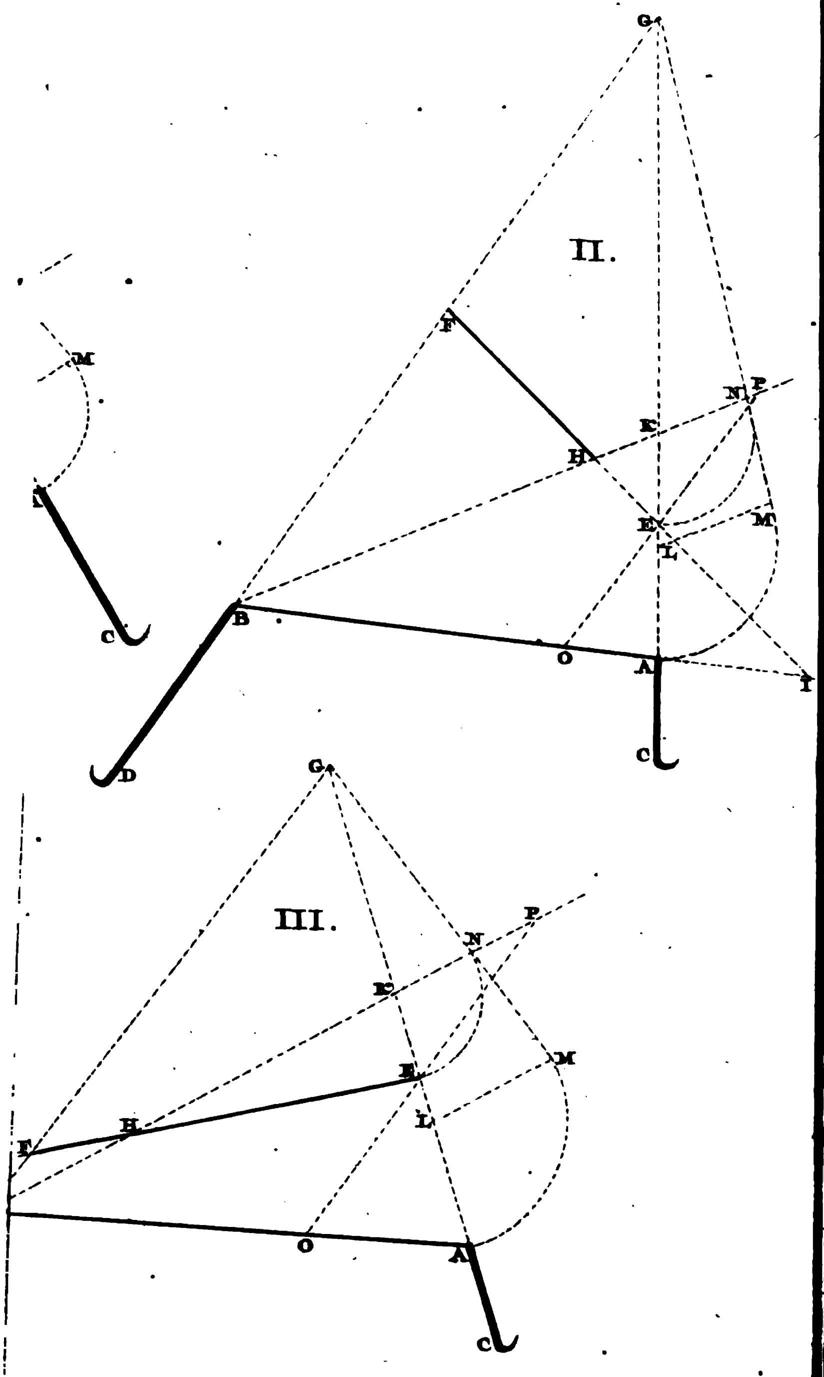
Et de cette façon j'estime qu'il est pleinement satisfait à tout ce qui peut estre proposé sur la préparation nécessaire à la régle de Pappus, c'est à dire, à la recherche des diamétres de mesme conjugaison d'un Arc à décrire, qui touche deux pieds droits en deux points donnez, soit que la hauteur de l'Arc ne soit pas donnée, ou qu'elle soit déterminée par un point, ou par une ligne, ou par un plan.

QUATRIE'ME OBSERVATION.

MAIS parce que l'austerité de la démonstration nous a obligé à quantité de lignes inutiles pour la pratique, & qui peuvent embarrasser les Ouvriers, qui ne sont pas accoustumez à les démesler; il m'a semblé que je ferois une chose qui leur seroit agréable, si je leur enseignois une Méthode universelle & facile de trouver ces diamétres en toute sorte de Cas. Ce qui se fait ainsi.

Ma-

PLANCHE. X.



Blondel.

Maniére universelle de trouver les diamétres de mesme conjugaison de la Section qui doit former l'Arc rampant sur toute sorte de pieds droits & de hauteurs.

Soient (aux Figures de la Planche 11. & aux 2. premieres de la 12. Planche.) les pieds droits AC & BD continüez indéfiniment, en sorte qu'ils se rencontrent en G, s'ils ne sont point paralléles; & la ligne de la rampe AB soit divisée en deux également en Z; & du point Z soit ménée une droite, ou paralléle aux pieds droits, (si ceux-cy le sont entre eux,) ou passant par le point de leur rencontre G: Ensuite soit la ligne donnée ou non donnée EF qui détermine la hauteur de l'Arc proposé, laquelle soit ou paralléle à la ligne de la rampe AB, ou la rencontrant au point I; & cette ligne EF, comprise entre les lignes AC & BD continüées, soit coupée en deux également en K, d'où il faut méner une ligne KM égale à KF, & qui fasse quelque angle que ce soit avec EF; & méner IM, à laquelle du point F, il faut tirer une paralléle FL, & faire KH égale à KL; puis du point H il faut méner la ligne HB, & la diviser en deux également en S, par où du point F il faut tirer la ligne FSY; laquelle sera ou paralléle à la ligne GZ, ou elle la rencontrera au point Y dans l'angle AGB, ou dans celuy qui luy est au sommet. Au premier Cas la Section sera une Parabole en la 1. Figure de la 12. Planche. Au second Cas une Ellipse, aux 5. Figures de la Planche 11., & une Hyperbole au troisiéme Cas dans la 2. Figure Planche 12. Et joignant aux deux derniers Cas la ligne HY, & la continüant en sorte que YT soit égale à YH, & menant par le point Y la ligne VYX paralléle à EF, sur laquelle du point B tombe la ligne BN paralléle à HY; il faut faire YQ égale à YN, & sur la ligne QYX comme diamétre, décrire le demicercle XRQ, qui soit coupé en R par la ligne YR tirée du point Y perpendiculaire à VX; & enfin faire les deux lignes YO, & YP égales à YR:

Planche XI. & Fig. I. & II. de la XII. Planche.

Les diamétres de mesme conjugaison de l'Ellipse, ou de l'Hyperbole que l'on demande, seront les deux lignes HT & OP.

Et pour la Parabole, il faut du point B mener BN parallèle à EF, (comme en la 1. Figure de la 12. Planche) & HV parallèle à GZ, qui coupe BN en N; sur laquelle il faut prendre HV égale à BN, & du point V mener VX parallèle à EF, & rencontrant la ligne HB prolongée en X; & enfin prendre sur EF continüée la ligne HT égale à VX. La ligne HN sera le diamétre de la Parabole, auquel BN sera ordonnée sous l'angle HNB, & la ligne HT en sera le Paramétre.

TROISIE'ME DISCOURS.

Trouver les Axes d'une Section servant à la description d'un Arc rampant, dont les diamétres de mesme conjugaison sont donnez.

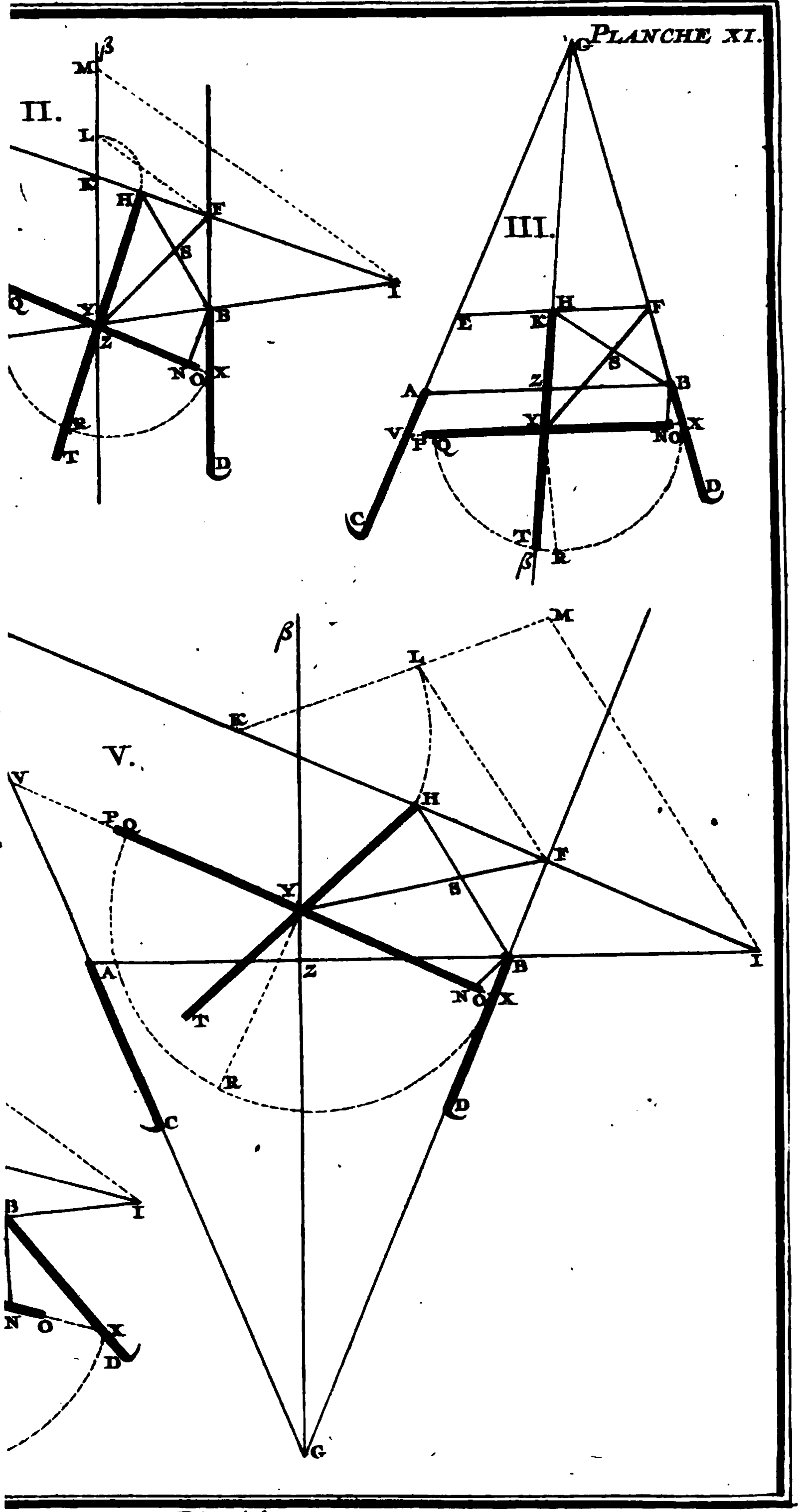
PREMIE'RE OBSERVATION.

Premier moyen par la Régle de Pappus.

Ces choses estant supposées, il ne reste plus qu'à trouver les Axes & les foyers pour décrire facilement la Section proposée, c'est à dire, appliquer, aux diamétres trouvez de l'Ellipse, la Régle de Pappus, dont nous avons parlé au commencement de ces Discours, & dont nous rapporterons premiérement la pratiqúe qui se doit entendre pour toute sorte de Cas, & nous la démontrerons ensuite. Le Probléme est donc tel.

RE-

PLANCHE XI.



Blondel.

REGLE DE PAPPUS.

Deux diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse estant donnez, en trouver les Axes & les foyers ou fingliots.

Les *deux diamétres de mesme conjugaison HT & OP estant proposez* (aux Figures de la 13. Planche) *& par le point H, la ligne EHF indéfiniment prolongée, & parallèle à OP; il faut sur HT au point A élever à angles droits la ligne HI égale à OY, & mener IY; sur laquelle au point I il faut tirer à angles droits la ligne IK, qui rencontre la ligne TH prolongée en K. Ensuite, aprés avoir divisé en deux également au point R la ligne YK, & mené à angles droit la ligne RS, qui coupera EF en quelque part comme en S (parce que les diamétres HT, & OP n'estant pas les Axes, l'angle HYP, ou son égal EHY ne sera pas droit;) il faut du point S comme centre, & de l'intervalle SY ou SK, décrire le cercle KδYβ, lequel coupe la ligne EF aux deux points δ & β; d'où par le point Y, il faut mener les deux lignes indéfinies βY & δY, sur lesquelles du point H, il faut mener à angles droits les lignes HL, & HM. Ensuite il faut faire sur la ligne βY prolongée la ligne NY égale à YL; & sur la ligne βN comme diamétre, décrire un demicercle NQβ qui coupe δY au point Q, & rapporter la ligne YQ de part & d'autre du point Y sur βY, en sorte que les lignes YV, & YX soient égales à YQ; & par ce moyen nous aurons la toute VX pour l'un des Axes. En la mesme maniére prenant sur δY prolongée la ligne Yζ égale à YM, & sur la toute δζ comme diamétre décrivant le demicercle δλζ qui coupe βY prolongée au point λ; il faut de part & d'autre du point Y, sur la ligne δY, prendre les deux YG & YZ égales à Yλ, afin d'avoir la toute GZ pour l'autre Axe. Et prenant une extrémité du moindre Axe comme le point G pour centre, & de l'intervalle Gθ égal à la moitié de l'autre Axe, c'est à dire, à MV; il faut décrire les deux Arcs de cercle qui coupent la ligne* Planche XIII.

βY, c'est à dire, le plus grand Axe aux deux points θ & ε, lesquels seront les foyers de la susdite Ellipse, que les Ouvriers appellent les singliots.

Voilà la pratique de Pappus, qui est la 14. proposition du 8. livre de ses Collections Mathématiques: Et quoy que je ne la rapporte pas tout-à-fait dans les mesmes termes, c'est pourtant toûjours la mesme chose; & ce que j'y ay adjousté n'est que pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers: comme lors qu'il dit seulement qu'il faut faire le rectangle YHK égal au quarré OY, parce que, la maniére d'appliquer un quarré à une ligne droite, qui est la mesme que de trouver une troisiéme proportionnelle à deux droites données, n'est pas familiére aux Ouvriers; j'ay mieux aimé leur en marquer l'opération par le moyen du triangle rectangle YIK, (dans lequel la ligne IH estant perpendiculaire à la base YK, le quarré HI, ou son égal OY est égal au rectangle YHK, ainsi que Pappus l'ordonne,) que de la supposer comme luy toute faite. Tout de mesme, quand il dit qu'il faut faire les deux quarrez YV, & YX égaux au rectangle βYL, & les deux quarrez YG & YZ égaux au rectangle δYM; j'en ay fait les opérations toutes entiéres par le moyen des demicercles NQβ & δλζ.

Au reste, ce Probléme n'a que cette seule construction; & Commandin qui a commenté cét Auteur, s'étonne avec raison qu'il ne l'ait pas démontrée. Mais comme il y a dans le texte de la Proposition quelques obscuritez qui marquent qu'il a esté corrompu, je crois que la démonstration que Pappus en avoit faite s'est perduë avec le reste de ses Ouvrages qui nous manquent.

Mais ce qui me surprend davantge, c'est que Commandin ayant entrepris de la réparer, y ait si mal réüssi luy-mesme, n'ayant pas pû conclure, comme il fait, que les lignes XV & GZ soient Axes de l'Ellipse, parce que l'angle βYδ est droit, aussi-bien que les angles au point L; mais bien seulement que au cas que la ligne XV soit l'Axe, la ligne HL luy sera ordonnée; puis que quel-

quelque point de la ligne EF que l'on prenne pour centre d'un cercle qui passe par Y, & coupe EF en deux autres points que β & δ, d'où l'on méne deux lignes au mesme point Y; l'angle de ces lignes sera toûjours droit au susdit point Y, & l'on pourra tirer du point H une ligne qui fasse aussi angle droit avec celle qui viendra d'un autre point que β au point Y; & cependant cette ligne ne sera pas l'Axe de l'Ellipse. Et je m'étonne que Commandin ne se soit pas apperceû que toute la force de la construction de Pappus dépend de ce que le rectangle YHK, c'est à dire, δHβ, est égal au quarré OY, & qu'il n'ait pas sceû la verité de ce Théorème que je démontre en cette maniére.

THEOREME.

Si deux diamétres de mesme conjugaison estant donnez dans une Ellipse, l'on tire de l'extrémite de l'un d'eux une Contingente qui rencontre les deux Axes: le rectangle des parties de la Contingente entre les Axes, & le point de l'attouchement, est égal au quart du quarré de l'autre diamétre.

Soient dans l'Ellipse VGXZ, dont les Axes sont VX & GZ (dans la 3. Figure de la 12. Planche) deux diamétres de mesme conjugaison HT & OP; & de l'extrémité d'un d'eux, comme de H soit tirée la touchante δHβ, (qui sera par conséquent paralléle à OP,) laquelle coupe les Axes, sçavoir VX au point β, & GZ au point δ; je dis que le rectangle βHδ est égal au quarré OY. *Figure III. de la XII. Planche.*

Pour le démontrer, il faut premiérement au point O mener une autre Contingente ξOπ, (qui sera aussi paralléle à HT,) & qui coupe les Axes VX en π, & GZ en ξ; puis au point V en mener une autre φVζ, (laquelle sera aussi paralléle à l'Axe GZ,) & qui coupe la Contingente δH en φ, & OP prolongée

en ζ; enfin des points H & O mener HM & HL, Oμ & Oν ordonnées aux Axes VX & GZ, & continüer HL en ς.

Maintenant, à cause de la touchante δHβ, le rectangle βYL est égal au quarré VY; & à cause de la touchante ξOπ, le rectangle πYμ est aussi égal au mesme quarré VY; les deux rectangles donc βYL, & πYμ sont égaux: Et partant la ligne βY est à πY comme Yμ à YL. De plus, comme les lignes δβ, OY sont paralléles, aussi-bien que les lignes πξ & HY; les triangles βHY, YOπ sont semblables, aussi-bien que les triangles βHL, YOμ: & partant dans les deux premiers βY sera à πY comme Hβ à OY; & dans les deux derniers Hβ sera à OY comme HL à Oμ; & par conséquent βY sera à πY comme HL à Oμ. Mais nous avons démontré cy-dessus que βY estoit à πY comme Yμ à YL, c'est à dire, dans les triangles OYμ, ςYL, comme Oμ à Lς: Donc HL sera à Oμ, comme Oμ est à Lς; & partant le rectangle HLς sera égal au quarré Oμ; & par conséquent le quarré YL aura mesme raison au rectangle HLς, qu'au quarré Oμ. Mais la raison du quarré YL au rectangle HLς est composée de celles de YL à HL, ou à son égale YM, & de YL à Lς, c'est à dire, à cause que les triangles YLς, βYδ sont semblables, de βY à Yδ, lesquelles composent aussi la raison du rectangle βYL au rectangle δYM, ou de leurs égaux le quarré VY au quarré GY: Donc le quarré YL sera au quarré Oμ comme le quarré VY au quarré GY, ou prenant leurs quadruples, comme le quarré de l'Axe VX au quarré GZ. Mais comme le quarré VX au quarré GZ, ainsi le rectangle VμX est au quarré Oμ: Donc le quarré YL, & le rectangle VμX auront mesme raison au quarré Oμ; & partant ils seront égaux: Et par conséquent le rectangle βYL sera au quarré YL, c'est à dire, la ligne βY à YL, comme le mesme rectangle βYL, ou son égal le quarré VY, au rectangle VμX; Et par conversion de raison βY sera à βL comme le quarré VY au quarré Yμ. Mais comme βY à βL, ainsi βδ est à βH, c'est à dire, en prenant

δH

δH pour commune hauteur, le rectangle $\beta\delta$H au rectangle βHδ: Donc le rectangle $\beta\delta$H sera au rectangle βHδ comme le quarré VY au quarre Yμ. Mais à cause des paralléles δY, HL, & ϕV, le rectangle $\beta\delta$H est égal au quarré $\delta\phi$, comme le rectangle βYL est égal au quarré VY: Et partant le quarré $\delta\phi$, ou son égal Yζ, sera au rectangle βHδ, comme le quarré VY au quarré Yμ. Mais comme le quarré VY au quarré Yμ, ainsi est le quarré Yζ au quarré OY: Donc le quarré Yζ aura mesme raison au rectangle βHδ qu'au quarré OY: Et par conséquent le rectangle βHδ est égal au quarré OY. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE OBSERVATION.

Autre moyen de trouver les Axes susdits.

APRE'S avoir suffisamment discouru sur la maniére de Pappus, pour trouver les Axes d'une Ellipse, dont les diamétres de mesme conjugaison sont donnez; il ne reste plus qu'à en enseigner une qui trouve ceux de la Parabole, & de l'Hyperbole, ainsi que nous l'avons promis. Mais comme la régle, par laquelle on résout le Probléme pour ces deux Sections, est universelle, & sert aussi à résoudre celuy de l'Ellipse; il m'a semblé qu'il ne seroit pas inutile de l'expliquer en cét endroit, & que les Ouvriers m'auroient une double obligation, si je leur enseignois divers moyens de parvenir à un mesme but, desquels ils pourront choisir celuy qui leur sera plus agréable, ou mesme faire la preuve de l'un par l'autre, puis qu'estant également vrais & démonstratifs, ils doivent également bien réüssir, si on fait les opérations comme il se doit.

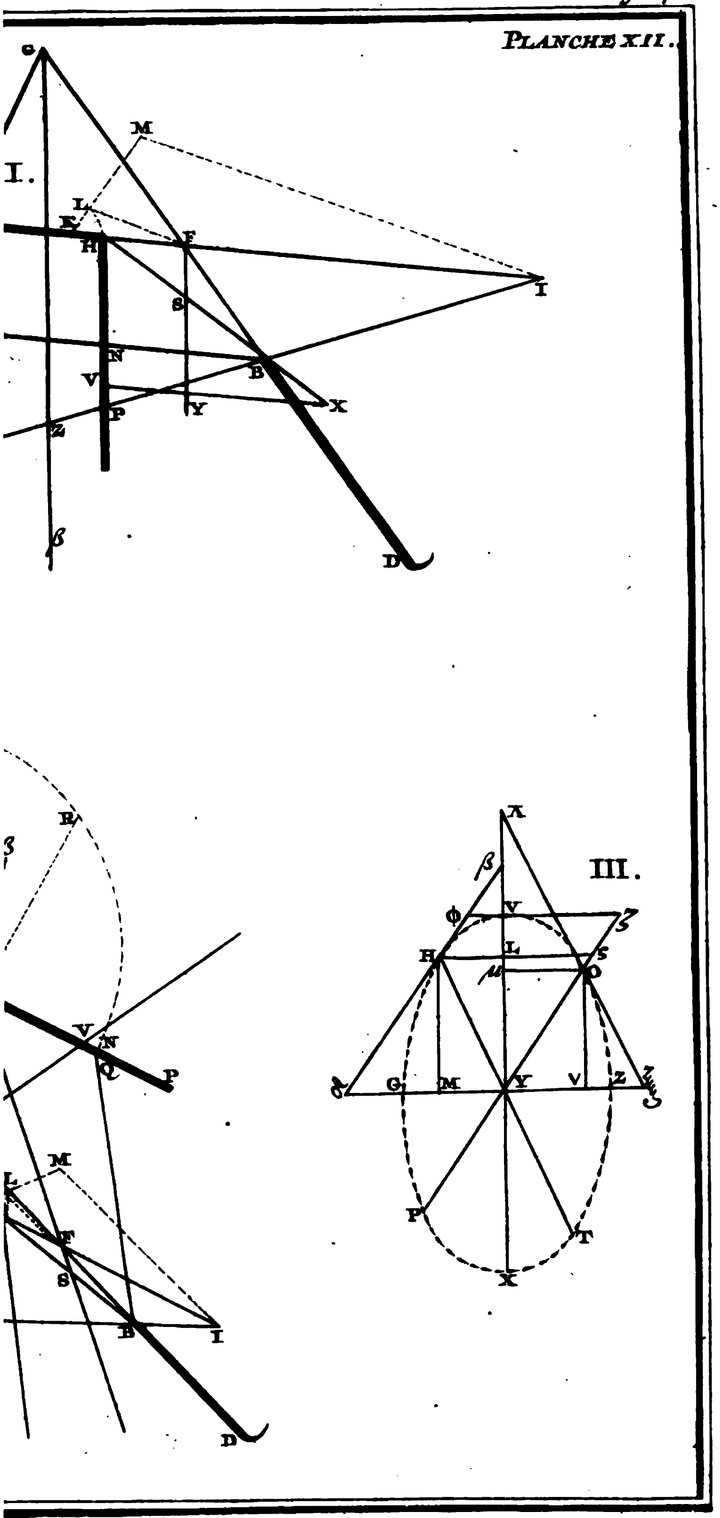
Maniére universelle de trouver les Axes d'une section Conique, dont les diamétres de mesme conjugaison sont donnez.

Pour l'Ellipse & pour l'Hyperbole.

Figures de la XIV. Planche.

SOIENT donnez deux diamétres de mesme conjugaison d'une Ellipse ou d'une Hyperbole HT & OP se coupans au centre Y, & l'angle HYP (comme aux Figures de la 14. Planche.) Il faut premiérement prendre la ligne HD troisiéme Géometrique aux deux TH & OP, & l'ajouster à la ligne TH dans l'Ellipse, ou la retrancher de la mesme TH dans l'Hyperbole, ou enfin retrancher la ligne TH de DH, si celle-cy est plus grande que l'autre; puis couper en deux également en I la toute, ou la différence TD. Ensuite sur la ligne HY comme diamétre soit décrit le demicercle HNKY, (en sorte qu'il ne coupe point l'autre diamétre OP) dont le centre soit G, dans lequel soit appliquée HN paralléle à OP, & continüée indéfiniment; puis, aprés avoir divisé HN en deux également en C, & tiré GC, il faut prendre sur CH continüée, s'il en est besoin, la ligne CB égale à IH, & tirer BL paralléle à GC, ou perpendiculaire à CB, laquelle BL rencontre la ligne TH prolongée, s'il est besoin, en L, d'où il faut méner LM paralléle à OP, & égale à HD, (de la part de H vers C dans l'Hyperbole, & dans l'Ellipse, si le point I se rencontre entre les points D & H comme en la Figure 3, ou de la part opposée, si le point H se trouve entre I & D, comme en la 4. Figure;) & du point M par G méner MKG, qui coupe le demicercle en K, par où des points H & Y il faut méner indéfiniment les lignes HKQ, & YKF, qui rencontre HN continuée en V; aprés quoy entre les deux VY & YK, il faut faire YE moyenne Géometrique, à laquelle il faut prendre YF égale, & tirer des points E & Y des lignes indéfinies ER, & ZYX paral-

PLANCHE XII.



Blondel.

paralléles à HK; puis aux deux EK & KH faire une troisiéme Géometrique KQ, & du point F par Q mener FQR, qui coupe ER en R; & enfin entre les deux ER, & EF, trouver une moyenne Géometrique, dont la moitié soit égale à chacune des lignes YX & YZ: Et faisant dans l'Ellipse du point F sur l'Axe XZ les lignes FA, & FS égales à YZ; ou bien dans l'Hyperbole du point Y sur l'Axe EF, les lignes YA & YS égales à EZ; On aura les deux Axes que l'on demande ZX & EF, & les deux foyers ou singliots A & S.

Pour la Parabole.

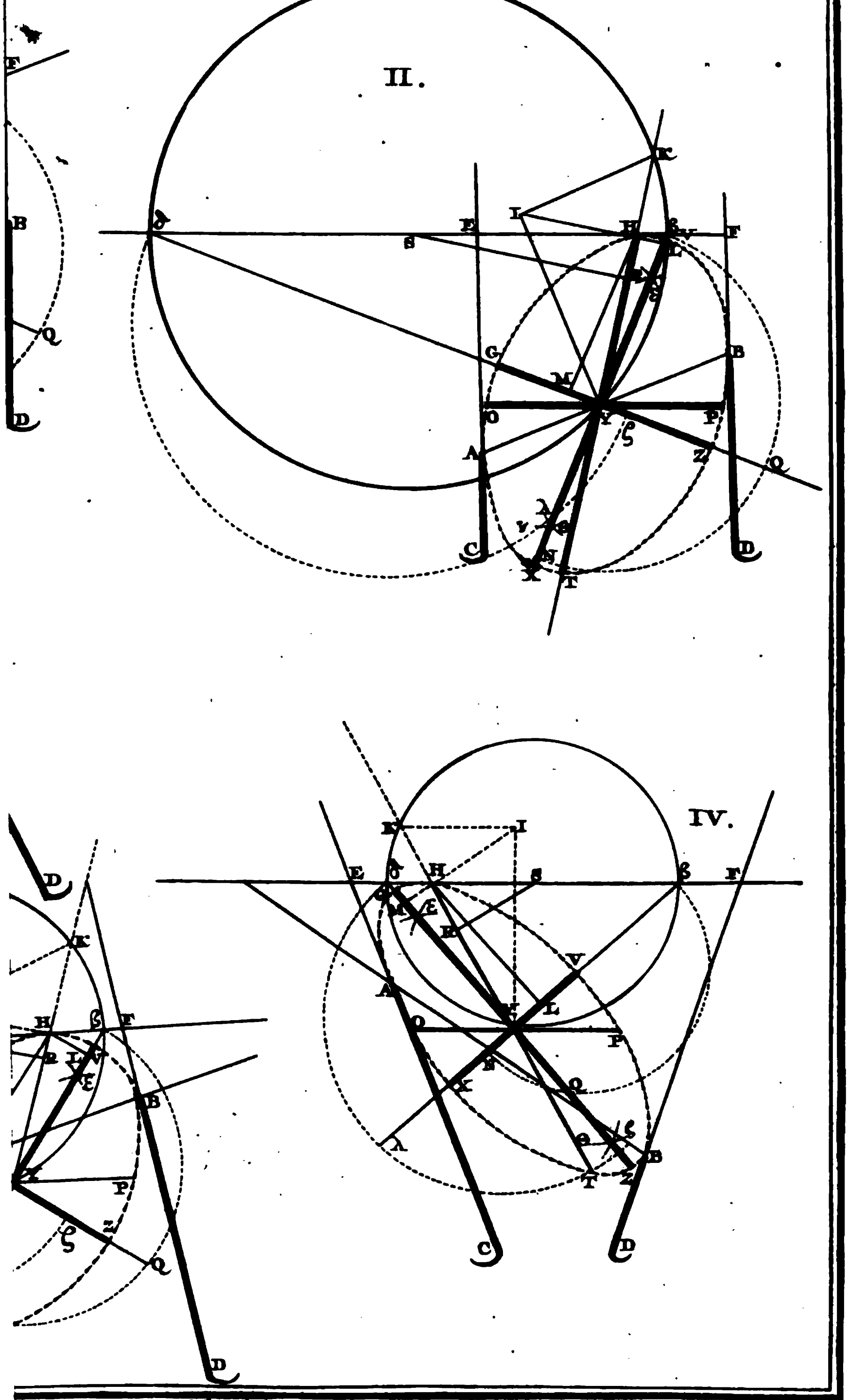
Soit OZ le diamétre d'une Parabole, & OR son paramétre en l'angle ROZ, (comme en la 1. Figure de la 15. Planche.) Et aprés avoir continüé ZO au dessus du point O, il faut prendre OP égal à la moitié du paramétre OR; & du point P tirer la ligne PQ perpendiculaire à RO continüée, s'il en est besoin, & du point Q mener QT paralléle à OZ, & OS perpendiculaire à QT; ensuite, aprés avoir divisé QS en deux également en X, mener XV paralléle à OS, & troisiéme Géometrique aux deux lignes XS & OS. Je dis que le point X sera le sommet, la ligne XT l'Axe, & XV le costé droit de la Parabole proposée. *Fig. I. de la XV. Planche.*

La démonstration de cette maniére universelle se fait en cette maniere. Aprés avoir du point K (dans les Figures 3. 4. pour l'Hyperbole, & 5. 6. & 7. de la 15. Planche pour l'Ellipse, pour éviter la confusion des lignes dans les Figures de la 14. Planche) mené la ligne Kπρ paralléle à NH, & qui rencontre la ligne GC prolongée, s'il en est besoin, au point O, je raisonne ainsi. Les triangles GHC, LHB estans semblables, LH sera à GH comme BH à HC, & en composant (dans les 3. 4. & 6. Figures) ou par conversion de raison (dans la 5.) LG sera à GH comme BC à CH. Mais à cause de la similitude des triangles *Fig. III. IV. V. VI. & VII. de la XV. Planche.*

LGM, HGθ; LG eſt à GH comme LM à Hθ: Donc BC eſt à CH comme LM eſt à Hθ; & en permutant BC eſt à ML comme CH à Hθ. Mais comme BC a eſté priſe égale à IH, & ML égale à HD; & comme CH eſt à Hθ, ainſi Oπ eſt à πK: Donc IH eſt à HD comme Oπ eſt à πK: Et (dans la 3. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, en doublant les conſéquens, par converſion de raiſon, & en changeant; ou (dans la 4. Figure) en diviſant, doublant les antécédens, & en compoſant; ou bien (dans la 5. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, doublant les conſéquens, en diviſant, & en changeant; ou (dans la 6. Figure) en compoſant, doublant les antécédens, & en diviſant; ou enfin (dans la 7. Figure) en changeant, par converſion de raiſon, doublant les conſéquens, en diviſant & changeant; HT ſera à DH comme πρ eſt à Kπ, c'eſt à dire, comme le rectangle ρπK eſt au quarré Kπ, ou comme le ractangle HπY au meſme quarré Kπ; & en changeant, le quarré de la ligne Kπ ſera au rectangle HπY comme la ligne HD eſt à HT, c'eſt à dire, au double de la ligne HY. Mais HD a eſté priſe dans tous les Cas la troiſiéme proportionnelle aux deux diamétres de meſme conjugaiſon HT & OP: Donc la ligne HD ſera le paramétre du diamétre HT, par la 4. des ſecondes def. du 1. des Coniques d'Apollonius; & HD eſtant à la double de HY comme le quarré de Kπ eſt au rectangle HπY; le point K eſt trouvé, ainſi que le demande la préparation des deux cas des Propoſitions 53. & 54. du 1. des Coniques d'Apollonius; & le reſte de noſtre pratique eſt le meſme que ce qui eſt fait & démontré dans ces deux Problémes. La démonſtration pour la Parabole eſt toute entiére dans la 52. Propoſition du meſme Livre.

RE-

PLANCHE XIII.



Blondel.

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

TROISIEME PROBLEME RESOLU.

Trouver Géometriquement les veritables joints de teste de toutes sortes d'Arcs rampans.

FREMIER DISCOURS.

APRES avoir enseigné cy-dessus la maniére de décrire les Arcs rampans, il est bien juste d'avertir les Ouvriers que leur pratique ordinaire d'en tracer les joints de teste est inutile, ou fautive. Voici ce qu'ils font.

Ils divisent premiérement l'Arc comme D A F (dans la 2. Figure de la 15. Planche,) en autant de portions qu'ils veulent faire de Voussoirs, comme A B & A C; & voulant tirer le joint de teste, par éxemple du point A, ils mettent le Compas sur le point B, & de quelque ouverture que ce puisse estre, pourveû qu'elle soit plus grande que la ligne A B, ils font de part & d'autre deux Arcs de cercle comme N M & P Q; puis rapportant le Compas au point C, ils en font deux autres comme R H & T V, qui coupent les *Fig. II. de la XV. Planche.*

premiers en G & O, par où ils tirent la ligne GO; (qui passera nécessairement par le point A,) & ils prennent la portion AG pour leur joint de teste; ce qu'ils font par tous les points de la division de leur Arc, pour avoir par ce moyen tous les autres joints de teste.

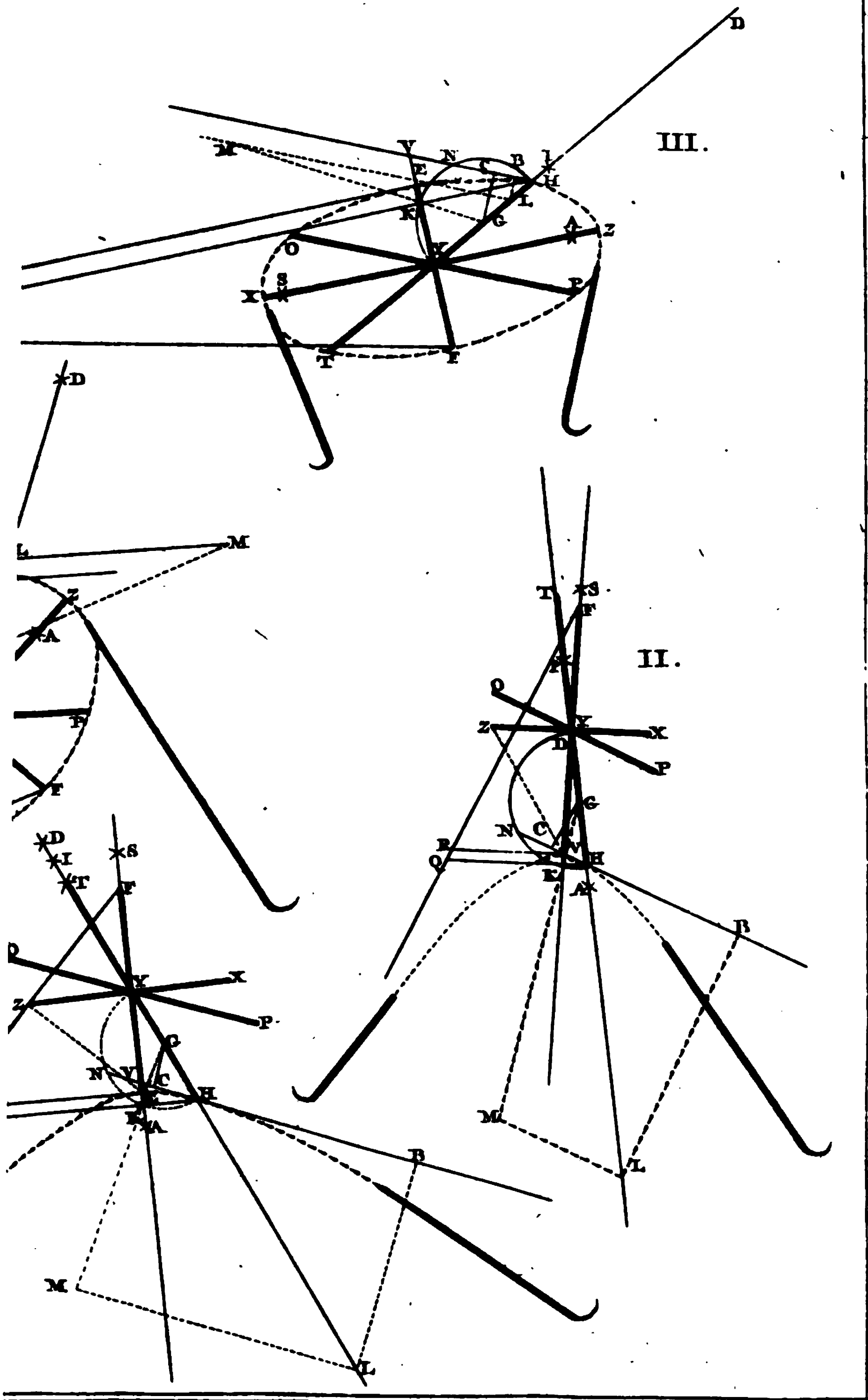
Sur quoy je dis premiérement, qu'il n'y a qu'aux seuls Cas, où l'Arc proposé est portion de cercle, ou bien lors qu'estant une section Conique, le joint se doit tirer par l'un des sommets, que cette Régle n'est pas fausse; ausquels Cas en échange elle est inutile, puis qu'il ne faut alors que tirer les joints au centre; & qu'en tous les autres Cas, où l'Arc proposé est portion d'une autre ligne que circulaire, elle est absolument fausse & absurde.

Parce que sur cette Hypothése on peut tirer une infinité de lignes différentes, & tendantes à différens points, qui passeront néantmoins par un mesme point de division de l'Arc, & pourront toutes également estre le joint de teste du mesme Arc en ce mesme point. Je veux dire que suivant cette méthode on pourra faire passer une infinité de lignes par le point A comme AG, AH, &c. tendantes à différens points comme G, H, &c. & qui pourront autant l'une que l'autre estre prises pour le joint de teste de l'Arc DAF au point A; ce qui est absurde, puis qu'il n'y a qu'un seul joint de teste qui puisse estre légitimement appellé tel en chaque point de quelque Arc que ce puisse estre; & la régle par conséquent qui en produit plusieurs ne peut estre que fausse & absurde.

Or qu'il soit vray que par la régle susdite on puisse tirer une infinité de lignes par le point A, qui pourront toutes estre également prises pour le joint de teste de l'Arc DAF en ce mesme point, je le montre en cette maniére. Soit par éxemple l'Arc DAF portion d'une Ellipse, & le point A pris ailleurs qu'au bout d'un des Axes: Et aprés avoir comme dessus pris les points B & C également distans de A, & tiré les Arcs MN, RH & PQ,

TV,

PLANCHE XIV.



Blondel.

TV, afin que des points de leur rencontre, G & O, on puisse méner la ligne GAO, laquelle sera perpendiculaire à la ligne BC, & la divisera en deux également en X, & la ligne AG sera par cette opération le joint de teste du point A.

Je dis maintenant, que si on prend quelqu'autre point dans l'Arc comme D, duquel on tire une ligne DE paralléle à BC, & rencontrant la section en E, & la droite GO en I, les angles au point I seront aussi droits; mais les droites DI & IE ne sont point égales, parce qu'autrement la ligne AO seroit l'Axe de l'Ellipse, (les deux lignes BC & DE estant paralléles, & toutes deux divisées également, & à angles droits par AO;) ce qui est contre l'Hypothése: Et partant DI ne sera point égale à IE, ni par conséquent la droite AD à la droite AE; Et partant si du point A nous inscrivons dans l'Ellipse une ligne AF égale à AD, elle tombera ou dessus ou dessous du point E, & la ligne DF dessus ou dessous de DE, & les angles faits au point K par la ligne GO ne seront point droits; & partant DK & KF ne seront point égales: Et partant si des points D & F également distans du point A, on fait selon la régle susdite des Arcs de cercle au dessus & au dessous, par le rencontre desquels on tire une droite comme HL, elle passera par le point A, & coupera au point L la ligne DF en deux également, & par conséquent elle ne sera pas la mesme que GK, & la droite AH ne sera pas la mesme que AG; & AH sera néantmoins le joint de teste de l'Arc au point A, suivant la régle susdite. Et comme on peut prendre une infinité de points différens également distans de part & d'autre du mesme point A, & par le moyen desquels on peut faire une infinité de lignes différentes par la regle susdite, qui peuvent estre aussi legitimement prises pour le joint de l'Ellipse au point A, que la ligne AG; & comme ce que je viens de démontrer pour l'Ellipse, peut estre aussi bien entendu pour toute autre sorte de ligne courbe différente de la circulaire; il s'ensuit ce que nous avons dit cy-dessus, & par conséquent que la régle qui est communément en usage parmy les Ouvriers, est fausse.

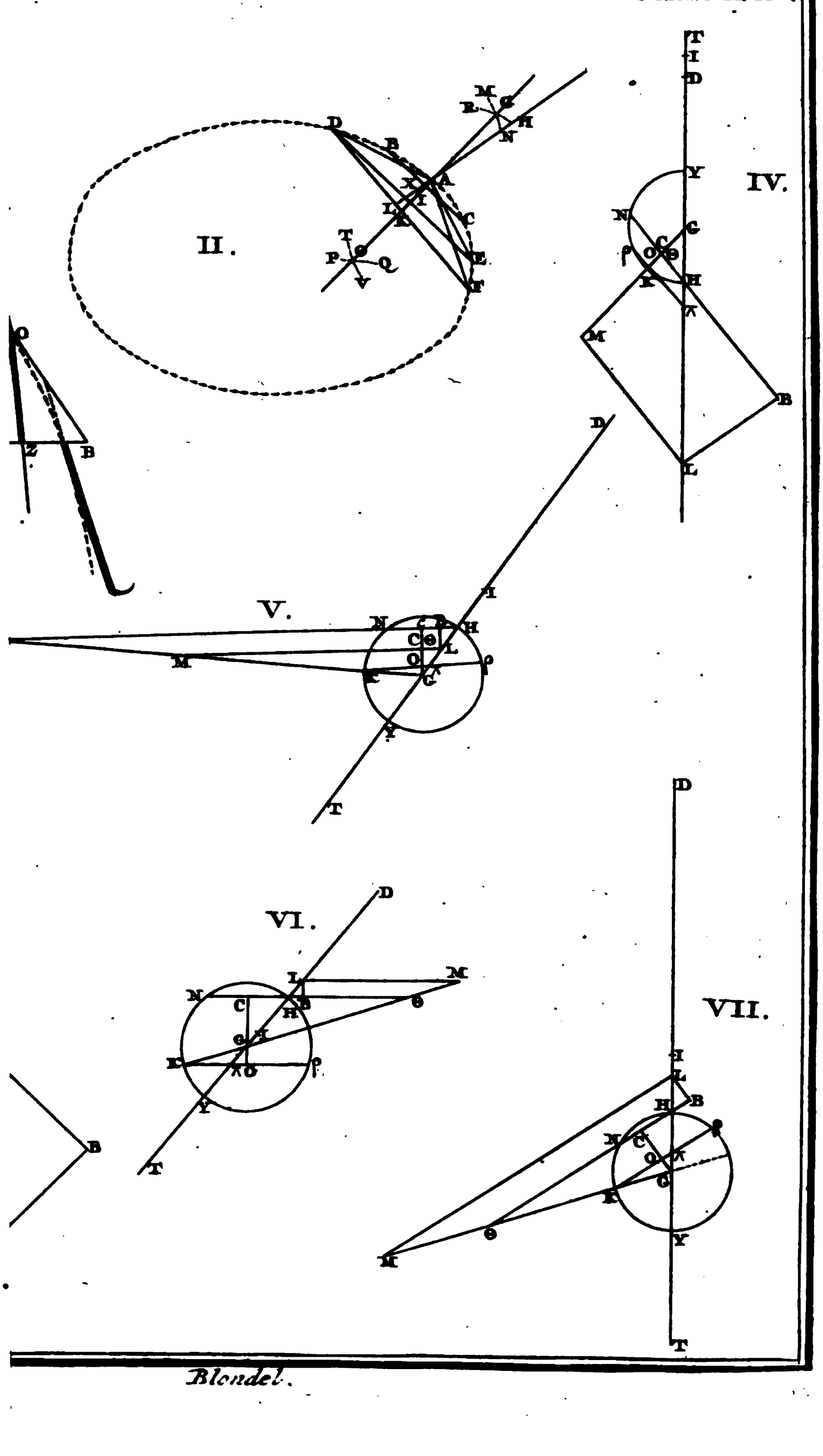
SECOND DISCOURS.

Mais comme il feroit inutile d'avoir découvert la fauſſeté de la pratique ordinaire, ſi l'on n'en enſeignoit une autre qui ne ſoit pas ſujette à ces défauts: j'ay pour ce ſujet aſſez ſérieuſement médité ſur cette matiére; ſur laquelle j'ay premiérement reconnu que la vraye & univerſelle maniére de tracer les joints de teſte de toutes ſortes d'Arcs dans toute leur perfection, tant pour la ſûreté & ſolidité de la liaiſon des Vouſſoirs, que pour la beauté & l'élégance du trait, conſiſtoit à les tirer perpendiculaires à l'Arc, c'eſt à dire, à plomb ſur les lignes qui toucheroient l'Arc aux meſmes points; puiſque cette pratique, (qui eſt la meſme que celle dont on ſe ſert au cercle où les joints de teſte vont au centre,) ne détermine jamais qu'un ſeul joint de teſte en chaque point, & donne aux coupes des Vouſſoirs toute la force & la grace, dont l'Arc puiſſe eſtre capable. Et pour la rendre familiére aux Ouvriers, j'ay tâché de leur en compoſer deux regles ſi faciles, que rien ne les puiſſe d'oreſnavant empeſcher de s'en ſervir; & quoy que les Arcs puiſſent eſtre portions de différentes Sections du Cone, comme du Cercle, de l'Ellipſe, de l'Hyperbole, ou de la Parabole; je les ay néantmoins conceûës ſous des termes ſi géneraux, & ſi propres, qu'elles peuvent également ſervir à toutes.

Maniére univerſelle de tirer les joints de teſte de toutes ſortes d'Arcs rampans.

Il faut de chaque point de l'Arc tirer des perpendiculaires à l'Axe de la Section, qui coupent le diamétre qui paſſe par le point, où le coſté droit, ou paramétre du meſme Axe, eſt coupé en deux également; & du point, où la perpendiculaire rencontre l'Axe, comme Centre, & de l'intervalle compris entre le ſuſdit Axe & le-

PLANCHE XV.



Blondel.

ledit diamétre, faire un Arc de cercle, qui coupera l'Axe en deux points, de l'un desquels, sçavoir de celuy qui est le plus éloigné du sommet de la section, il faut mener, par le point premiérement pris dans l'Arc rampant, une ligne droite, qui marquera le joint de teste que l'on demande.

Soit la ligne ACB l'Axe d'une section BKKB, (aux 1. 2. & 3. Figures de la 16. Planche) dont la ligne BH soit le costé droit ou paramétre; & par le point I qui divise BH en deux également, soit ménée indéfiniment le diamétre IN: Puis de quelque point pris dans la section comme de K, soit ménée la ligne KMN perpendiculaire à l'Axe qu'elle coupe en M, & le diamétre IN en N; & du point M comme centre, & intervalle MN, (c'est à dire, de la portion de la perpendiculaire comprise entre l'Axe ACB & ledit diamétre IN:) soit fait le cercle NL qui coupe le mesme Axe au point L, en sorte que le point M soit toûjours entre le sommet de la section dont il est le plus proche, & le susdit point L; duquel par le point K, il faut tirer la ligne LKO, qui donnera la droite KO pour le joint que l'on demande. *Fig. I. II. & III. de la XVI. Planche.*

Mais parce que les Ouvriers ne sçavent pas toûjours comme on trouve ce diamétre IN, il est à propos de leur en enseigner la maniére, supposé, par ce qui a esté montré dans le précédent Probléme, qu'ils connoissent les Axes de la section proposée, qui soient par éxemple les lignes ACB & ECD, par le moyen desquels il faut trouver la ligne BH costé droit ou paramétre de l'Axe ACB, ce qui se fait ainsi. Il faut du centre C prendre sur l'Axe CA la ligne CF égale à CD, & du point F tirer la ligne FG paralléle à AD, & du point A par G dans l'Ellipse & l'Hyperbole, (Figures 1. & 3.) tirer la droite AGH, qui coupe en H la ligne BH perpendiculaire à AB; ou bien dans la Parabole (Figure 2.) faire AH égale à CG, & tirer indéfiniment la ligne HG, afin que l'on aye par ce moyen en toutes les Figures la ligne droite BH pour le costé droit, ou paramétre que l'on recherche, qui estant divisé en deux également en I, &

ti-

tirant du centre C dans l'Ellipse & l'Hyperbole, la ligne CIN, ou bien tirant dans la Parabole la ligne IN paralléle à AC; la mesme IN sera le diamétre de la section que l'on demande. Ce que je démontre en cette maniére.

Mais auparavant je dois dire que les diamétres de la Parabole estant tous paralléles, il paroist qu'il n'y a aucun centre de cette Figure, c'est à dire, aucun point de concours des diamétres; & pour cét effet nous avons mis les deux extrémitez de l'Axe A & B en un seul point, qui est le sommet; Et pour le point C qui sert de centre, nous l'avons pris à fantaisie dans l'Axe, par lequel nous avons méné l'ordonnée ECD, qui fait en la Parabole, en quelque endroit que l'on la prenne, le mesme effet que le second Axe dans les autres Figures.

Je dis donc pour démontrer que la ligne IN est le diamétre que l'on cherche. Parce que CF est égale à CD, & GF paralléle à AD; la ligne AC sera à CD, comme CF, ou son égale CD à CG: Et partant, dans la Parabole (Figure 2.) le quarré de CD sera égal au rectangle ACG, & la ligne CG, ou son égale AH, sera le paramétre ou costé droit de l'Axe de la Parabole AC. Mais dans l'Hyperbole & l'Ellipse (Figures 1. & 3.) puisque AC est à CD comme CD est à CG; le quarré AC sera au quarré CD (ou leurs quadruples, sçavoir le quarré de l'Axe AB au quarré de l'Axe ED,) comme la ligne AC à la ligne CG, c'est à dire, comme l'Axe transverse AB à BH: Et par conséquent la ligne BH sera le paramétre ou costé droit de l'Axe tranverse AB.

Maintenant, pour démontrer que les lignes KO sont les veritables joints de teste de la section proposée, & qu'ils la coupent à angles droits; il faut de quelque point que ce soit de la section comme *k*; par lequel on a tiré un joint de teste *ko*, méner une ligne droite *k*R perpendiculaire à la ligne *ko*, & qui rencontre l'Axe de la section continüée en R, & prolonger la droite *km* jusqu'à ce qu'elle trouve GH continüée au point *q*. Aprés quoy, pour

pour faire voir que le joint ko coupe la section à angles droits, ou (ce qui est la mesme chose) que la ligne kR touche la section au point k, je raisonne en cette sorte. Dautant que du sommet k du triangle rectangle lkR, on a mené une droite km perpendiculaire à la base Rl, le rectangle Rml sera égal au quarré de km : Mais le mesme quarré km est aussi égal au rectangle Bmq, par les 11. 12. & 13. du 1. des Coniques d'Apollonius: Donc les rectangles Rml & Bmq seront égaux ; mais parce que la ligne ml est égale à mn, le rectangle Rml sera aussi égal au rectangle Rmn ; & partant les deux rectangles Rmn & Bmq seront égaux ; & la ligne Rm sera à Bm comme mq à mn, & en divisant RB à Bm comme qn à mn: Et partant comme la ligne qn dans la Parabole (Figure 2.) est égale à la ligne mn, la ligne RB sera aussi égale à Bm, & la droite kR touchera la Parabole en k par la 33. du 1. des Coniques. Mais pour l'Ellipse & l'Hyperbole (Figures 1. & 3.) puisque RB est à Bm comme qn est à mn, & qn est égale à HI ou BI ; la ligne RB sera à Bm comme BI à mn, c'est à dire, comme BC à Cm ; en permutant & composant RC sera à BC comme BC à Cm. Et comme AC est égale à CB ; la toute RA dans l'Ellipse sera divisée Harmoniquement aux deux points B & m, & la toute Am dans l'Hyperbole aux deux points B & R: & partant, en l'une & en l'autre, la ligne AR sera à BR comme Am à Bm ; & la ligne kR touchera la section au point k, par la 34. du 1. des Coniques. Et comme la mesme chose se peut semblablement démontrer dans tous les points de la section, il paroist de la verité de la proposition. Ce qu'il falloit démontrer.

 Seconde

Seconde maniére de tirer les joints de teste de toutes sortes d'Arcs rampans.

Il faut de chacun des foyers de l'Ellipse & de l'Hyperbole méner des lignes qui se rencontrent en un mesme point de l'Arc; Mais dans la Parabole il faut du foyer méner une droite, qui soit coupée en un point de l'Arc par une ligne paralléle à l'Axe. Ensuite dans toutes les sections, l'angle qui est fait par ces lignes au point de l'Arc, doit estre coupé en deux également par une droite, qui sera le joint de teste que l'on demande.

Fig. IV. V.&VI. de la XVI. Planche.

Des points G & F foyers de l'Ellipse ou de l'Hyperbole, (dans les 4. & 5. Figures) il faut tirer tant de lignes que l'on voudra GH, FI qui se coupent en des points de l'Arc comme en K. Tout de mesme, il faut du point F foyer de la Parabole, (dans la 6. Figure) méner FI qui soit coupée en un des points de de l'Arc K, par la ligne HK paralléle à l'Axe de la Parabole AF. Ensuite (dans toutes les trois Figures) il faut faire les deux lignes HK & IK égales, & des points I & H comme centres, & de quelque intervalle que l'on voudra, (pourveû qu'il ne soit pas plus petit que la moitié de la distance entre I & H) l'on doit décrire les deux Arcs qui se coupent au point L, d'où il faut méner OLK, qui sera le joint de teste que l'on recherche.

La démonstration en est aisée: Car ayant méné par un des points K la ligne MKN qui touche la section au point K, qui sera par conséquent (ainsi qu'il a esté démontré par d'autres) l'angle MKI égal à NKH; & l'angle IKL ayant esté fait égal à HKL, il s'ensuit que l'angle MKL est égal à NKL; & partant, que LK est perpendiculaire à la contingente.

Les points G & F foyers de l'Ellipse (dans la 4. Figure) se trouvent, en faisant les lignes EF & EG (qui sont tirées d'une des extrémitez du petit Axe ED sur le grand Axe AB) égales à CB, moitiê du grand Axe AB.

Ceux

Ceux de l'Hyperbole G & F (dans la 5. Figure) se trouvent, en prenant du point C, qui est le centre, les lignes CG & CF sur le grand Axe, égales à la ligne EB tirée d'un des bouts du petit Axe ED à une des extrémitez du grand Axe AB.

Le foyer de la Parabole F (dans la 6. Figure) se trouve, en faisant depuis le sommet A la ligne AF égale à AG, c'est à dire, au quart de la ligne AD qui est le paramétre, ou le costé droit de la Parabole.

RESOLUTION
DES
QUATRE PRINCIPAUX
PROBLEMES
D'ARCHITECTURE.

QUATRIEME PROBLEME RESOLU.

Trouver la ligne sur laquelle les Poutres doivent estre coupées en leur hauteur & largeur, pour les rendre par tout également fortes & resistantes.

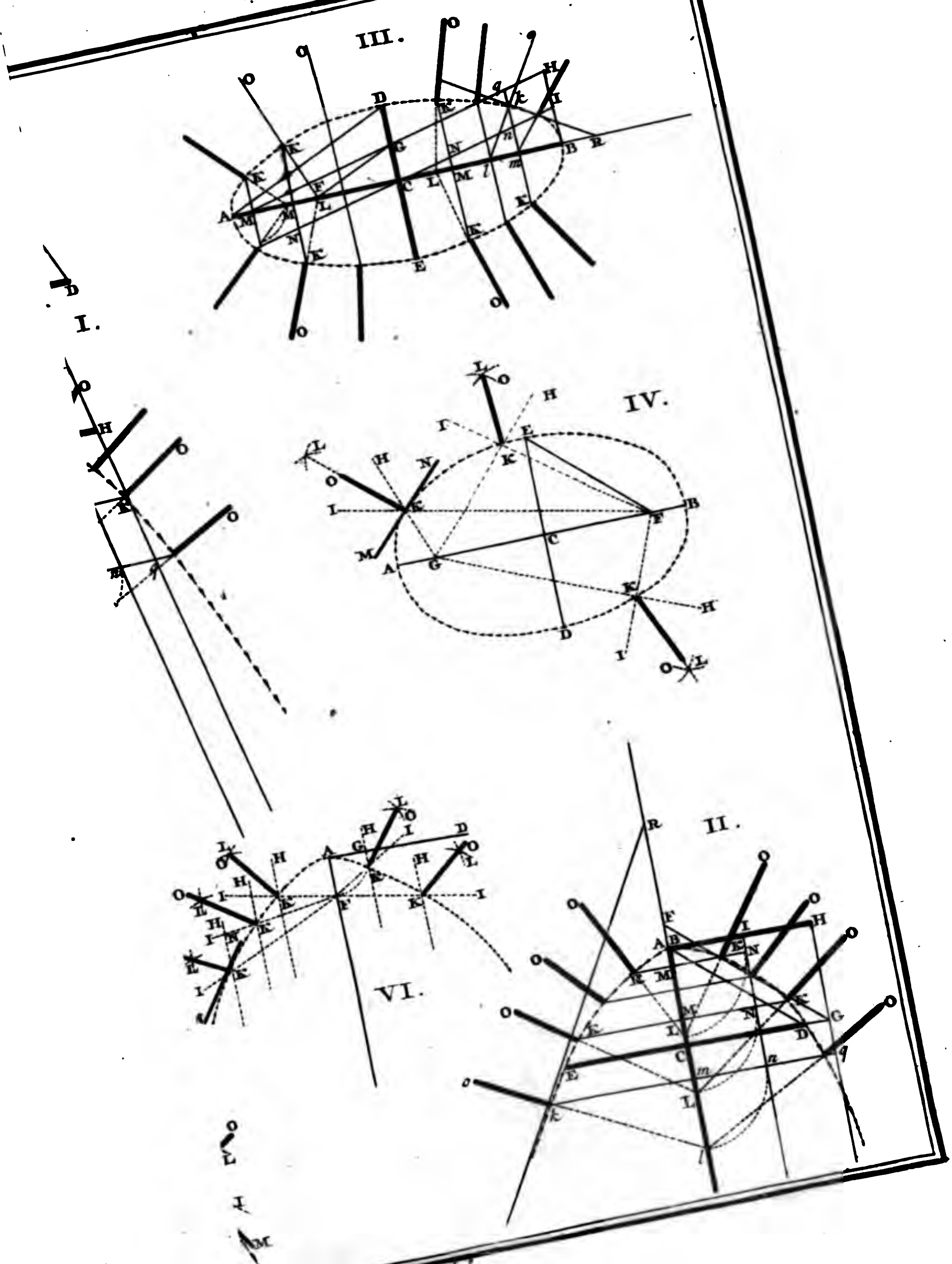
PREMIER DISCOURS.

OU

F. B. EPISTOLA AD P. W.

In quâ celebris Galilæi propositio discutitur circa naturam lineæ quâ Trabes secari debent secundùm altitudinem, ut sint æqualis ubique resistentiæ; & in quâ lineam illam non quidem Parabolicam, *ut ipse Galilæus arbitratus est, sed* Ellipticam *esse, demonstratur.*

PLANCHE XVI.



Blondel.

F. B. P. W. S. P. D.

PERGRATÆ mihi tuæ litteræ fuerunt, cùm ex illis intelligam & te valere, & me à te amari; quamquam subiratior videaris quòd ad te raròscribam, id quod non tam meâ negligentiâ quàm penuriâ Tabellariorum contigisse, credas velim. Nam à quo tempore à Sarmatis ad Cimbros evolavit Heros vester, nemo sanè fuit qui ad te tutò perferret litteras, etsi id optabam vehementer, tùm ut sinceras tibi grates agerem, quòd officiosâ tuâ confabulatione sciverit Magnus ille noster amicus, maximo me affectum fuisse gaudio, cùm summum Arctoi maris imperium, ei concessisse mihi nuntiatum est; tùm etiam ut tibi significarem, id mihi perutile futurum, si me quâ soles benignitate apud illum amicâ commendatione prosequereris.

Cæterùm perjucunda mihi profectò fuit elegantissima tua narratio de admirabili illâ Machinâ quâ in Colossicoteri tui Leonis Hyperborei constructione uti te dicis; & magnopere me delectat ista contemplatio intricatissimæ illius tignorum, rudentum, & ferramentorum, compagis, quæ Rectoris imperio ingenióque ita se præstat obsequentem: Sed pergratum mihi feceris, si per te certior aliquando fiam, quandónam Navis tua.

Premet imperiosa suum mare?

Ingens enim de illâ percrebuit rumor, dignam scilicet fore, cui

Baltica tota lubens deserviat ora.

Quod autem scribis, sectas à te ex præscripto Galilæi lineâ Parabolicâ secundùm altitudinem Trabes, ut æqualis ubique fo-

 rent

rent resistentiæ, non omninò exspectationi tuæ respondisse; istud me primùm non mediocriter commovit: tantæ enim apud me existimationis vir ille semper fuit, ut inducere in animum nunquam possem, quicquam ab eo minùs sapienter excogitatum posse à nobis aliquando resarciri.

Verùm re penitùs introspectâ, discussisque iis propositionibus, quas de resistentiâ Solidorum 2. lib. Mechan. conscripsit; & quandoquidem tu me meam ea de re sententiam rogas; ita me censere fateor, neque dissimulabo delusum sanè istâ ratione fuisse Galilæum, ut ea trabibus utrinque fultis congruere arbitratus fuerit, quæ tignis alterâ sui parte in murum infixis, aliâ verò liberè prominentibus convenire rectè demonstraverat.

Fig. 1. *Tab.* 17. Etenim quando asserit momentum resistentiæ in A (liceat enim mihi affari te verbis Geometricis) Cunei seu Prismatis triangularis ABGDF esse ad momentum ejusdem in C, ut linea AB est ad lineam CB: At è contrario momentum resistentiæ in A Trabis, seu Prismatis quadrangularis ABED, esse ad momentum ejusdem in C, ut linea CB est ad lineam AB: Id profectò aliter intelligi non potest, nequidem ex ipso Galilæanæ demonstrationis contextu, quàm si Prismata muro firmiter in punctis vel A, vel C adhærentia supponantur, dum Pondera ex B dependeant, quæ sic augeantur, ut Prismatum resistentiis evadant tandem æqualia; quorum ponderum eadém tunc erit ratio, quæ linearum AB & CB.

At si Trabs AE secari intelligatur per lineam Parabolicam FNKB, unde Solidum fiat AFNBGOD, quod Cuneum Parabolicum appellare licet; tunc ipse Galilæus infert, ex iis quæ antè demonstraverat, momenta resistentiæ in quibusvis punctis esse æqualia; id est, (ut patet ex contextu demonstrationis) Pondus quod pendens ex B, Solidum Parabolicum frangeret infixum in parietem in puncto A, seu per superficiem AFD; idem etiam Pondus pendens ex eodem B, idem Solidum frangeret infixum in parietem in puncto C, seu per superficiem CNO,

Fig. 2. *Tab.* 7.

&

& sic de cæteris. Quod perutile futurum ait rei ædificatoriæ, ac construendis præsertim navigiis, in quibus transtra quæ foros sustinent tertiâ ponderis & molis parte multari possint, salvâ & incolumi resistentiâ.

At ego (mi VV.) fateor, prorsùs ignorare me, cuinam id usui esse possit, transtra enim in navibus nulla sunt quæ utrinque non suffulciantur, & quorum extrema, imò & sæpè media pars, quibusdam rebus non insideant firmiter incumbántque.

Sed & rei Ædificatoriæ parùm id opinor subsidii afferet, cùm omnis ferè quæ in illa adhibetur materies, utrâque extremitate firmis quibusdam fulcimentis sustineatur; sic in contignationibus Trabes mutulis aut parietibus, asseres trabibus, columen Columnis, cantherii capreolis & transtris, & templa cantheriis insistunt: nec ullum ferè tignum reperias, cujus extremitas altera in murum infixa sit, altera verò liberè extrà promineat; nisi si quod in subgrundis domorum extet sustinendis trochleis, quibus pondera attollantur in Cœnacula, aut in mutulis quæ Mæniana suffulciant.

Restat igitur ut, si eadem tigna utrinque fulta supponantur, incumbántque in diversis eorum partibus illa pondera quæ trabes effringere possint; Quænam inter ista proportio intercedat, inquiramus.

PROPOSITIO PRIMA.

Ac primùm quidem de Prismate quadrangulari ABE fulto in A & B, notum est ex eodem Galilæo, momentum resistentiæ in C ad momentum resistentiæ in H, id est, minimum pondus quod incumbens in P, trabem frangeret, ad minimum pondus quod eandem frangeret in M, esse ut rectangulum AHB ad rectangulum ACB; hoc enim ab ipso demonstratum est. *Fig. I. Tab. 17.*

PRO-

PROPOSITIO SECUNDA.

Fig. 1. *Tab.* 17. At in Prismate triangulari seu Cuneo ABGDF; momenta resistentiæ sunt inter se, ut rectangula sub alternis lineæ AB partibus; id est, momentum in C est ad momentum in H, ut rectangulum sub lineis AH, CB, ad rectangulum sub lineis AC, BH. Est enim ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum resistentiæ Prismatis quadrangularis seu trabis AE, è quâ nascitur, in eodem puncto C, momenti resistentiæ trabis in C ad momentum ejusdem in H, & tandem momenti resistentiæ trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H. Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C est (ex Galilæo) ut quadratum CN ad quadratum CP seu AF, id est, ut quadratum CB ad quadratum AB, (componitur enim ex rationibus partium solidi contentarum in superficiebus CO & CI quæ sunt inter se ut superficies, id est, propter communem altitudinem NO, IP, ut lineæ CN & CP, & ex ratione distantiarum actionis earumdem, quæ etiam sunt ut eædem lineæ CN, CP:) Ratio verò momenti resistentiæ Prismatis quadrangularis seu trabis in C, ad momentum ejusdem in H est, ex eodem Galilæo, ut rectangulum AHB ad rectangulum ACB; & tandem ratio momenti resistentiæ trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H, est ut quadratum HM seu AF ad quadratum HK, id est, ut quadratum AB ad quadratum HB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei, seu Prismatis trianguIaris in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati CB ad quadratum AB, rectanguli AHB ad rectangulum ACB, & quadrati AB ad quadratum HB. Sed rationes quadrati CB ad quadratum AB, & quadrati AB ad quadratum HB sunt æquales rationi quadrati CB ad quadratum HB; & ratio

tio quadrati C B ad quadratum H B æqualis rationibus linearum CB. ad B H, plus CB ad B H; ratio verò rectanguli A H B ad rectangulum A C B, eadem est quæ linearum A H ad A C, plus H B ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus linearum C B ad BH, plus CB ad BH, plus AH ad AC, plus BH ad CB. Atqui rationes CB ad BH plus BH ad CB sese mutuò destruunt: Supersunt ergo rationes AH ad AC plus CB ad BH, quæ componunt rationem rectanguli AH, CB ad rectangulum AC, BH. Unde patet propositum.

PROPOSITIO TERTIA.

Sic si trabs ABE utrinque secetur per diagonales AQ, QB quæ Solidum deinceps Cuneatum AQBTRS efficiant, occurrentes in medio trabis QR. Momentum resistentiæ duplicis illius Cunei in C, erit ad momentum ejusdem in H, ut rectangulum sub lineis HB,BC ad rectangulum sub AC & AH. Nam ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Sed demonstrabitur, ut suprà, momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, esse in ratione compositâ quadrati lineæ C N ad quadratum lineæ G Q, & rectanguli A G B ad rectangulum ACB: Sed ratio quadrati CN ad quadratum G Q eadem est quæ quadrati C B ad quadratum G B seu ad rectangulum AGB: Ergo ratio momenti in C ad momentum in G, componetur ex rationibus quadrati CB ad rectangulum AGB, & rectanguli AGB ad rectangulnm ACB, quæ quidem sunt æquales rationi quadrati CB ad rectangulum ACB, vel denique rationi lineæ CB ad lineam AC. Eodem argumento demonstrabitur momentum resistentiæ Cunei in G ad momentum resistentiæ ejusdem in H, esse ut linea HB ad lineam AH: Ergo ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei in C, ad momentum ejusdem in H, *Fig. 3. Tab. 17.*

Q com-

componetur ex rationibus linearum CB ad AC, plus HB ad AH: quibus etiam componitur ratio rectanguli HBC ad rectangulum HAC. Unde patet propositum.

PROPOSITIO QUARTA.

Quod autem ad lineam Parabolicam spectat, quâ quadrifariam secari trabes possunt secundùm altitudinem, neutro tamen modo continget unquam, ut momenta resistentiæ supersint ubique

Fig. 2. *Tab.* 17. æqualia. Etenim trabs AE eâ ratione secetur ut Axis semiparabolæ sit longitudo trabis AB, amplitudo verò dimidia, sit ejusdem altitudo AF, (planè ut superior Galilæi figura docet,) unde Solidum AFNBGOD oriatur, quod Cuneum Parabolicum appellare licet: Quódque si utrinque fulciatur in A & B, momentum resistentiæ ut in C, erit ad momentum resistentiæ ut in H, in ratione lineæ AH ad lineam AC.

Nam demonstrabitur ut suprà rationem momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componi ex ratione quadrati CN ad quadratum HK, (id est, propter Parabolam lineæ CB ad lineam HB) plus ratione rectanguli AHB ad rectangulum ACB, (id est, ratione linearum AH ad AC, plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum CB ad HB, plus HB ad CB, plus AH ad AC; sed ratio CB ad HB destruit rationem HB ad CB, est enim ratio æqualitatis quæ in compositione rationum nihil addit aut demit: Ergo superest ratio lineæ AH ad AC, cui æqualis est ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QUINTA.

Fig. 4. *Tab.* 17. Deinde ipsa Trabs AE secetur diagonaliter à duabus semipara-

parabolis AKQ, BNQ, quarum Axis communis sit AB & dimidia amplitudo etiam communis GQ, quæ occurrentes in medio Trabis in Q, efficiant Solidum AKQNBTORLS, quod duplicem Cuneum Parabolicum appellare possumus; in quo momentum resistentiæ in C erit ad momentum resistentiæ in H, ut linea HB ad lineam AC.

Etenim ratio momenti resistentiæ duplicis Cunei Parabolici in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in puncto H, componitur ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H; jam verò ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in G, componitur ex rationibus momenti Cunei in C ad momentum resitentiæ trabis AE, è quâ nascitur, in eodem puncto C, & momenti trabis AE in C ad momentum Cunei in G. Atqui momentum Cunei in C ad momentum Trabis in C, est ut quadratum CN ad quadratum CP seu GQ, id est, (propter Parabolam BNQ) ut linea CB ad lineam GB: Momentum verò trabis in C est ad momentum Cunei Parabolici in G, ut quadratum GB ad rectangulum ACB, (idem enim est momentum resistentiæ Trabis & Cunei in G,) id est, in ratione linearum GB ad AC, plus GB ad CB: Ergo momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, erit in ratione linearum CB ad GB, plus GB ad AC, plus GB ad CB; id est, ut linea GB ad AC. Eodem modo ostendetur momentum Cunei in G, esse ad momentum ejusdem in H, ut linea HB est ad lineam AG seu GB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum GB ad AC & HB ad GB, id est, erit ut linea HB ad lineam AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO SEXTA.

Fig. 5. Tab. 17. Tertiò si Trabs AE secari intelligatur lineâ Parabolicâ AKQNB cujus vertex sit in Q, axis QG, & amplitudo AB, quâ quidem sectione fiet Solidum AQBTRS quod Parabolicum appellabitur; cujus momentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in H, ut rectangulum ACB est ad rectangulum AHB, vel, quod idem est, ut linea CN ad lineam HK.

Etenim, ut suprà ostensum est, ratio momenti illius Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli AHB ad rectangulum ACB, id est, ex rationibus linearum CN ad HK plus CN ad HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB: Sed ratio lineæ CN ad HK, eadem est (propter Parabolam) quæ rectanguli ACB ad rectangulum AHB: Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus CN ad HK, plus rectanguli ACB ad rectangulum AHB, plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB: Sed rationes ACB ad AHB, & AHB ad ACB sese mutuò destruunt: Est ergo momentum resistentiæ Solidi Parabolici in C ad momentum ejusdem in H, ut linea CN ad lineam HK, id est (propter Parabolam) ut rectangulum ACB est ad rectangulum AHB. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Et hinc vides istius Solidi Parabolici momenta proportionem habere inversam momentorum Trabis è quâ enatum est; illius enim momentum in C est ad momentum in H, ut rectangulum ACB ad rectangulum AHB; hujus verò è contrario momentum resistentiæ in C est ad momentum resistentiæ in puncto H, ut rectangulum AHB est ad rectangulum ACB.

PRO-

PROPOSITIO SEPTIMA.

Quartò denique secetur Trabs AE per semiparabolam FNKB, cujus axis sit AF & dimidia amplitudo AB; exurgatque Cuneus parabolicus AFKBGOD; in quo momenta resistentiæ longè intricatiorem inter se proportionem sortientur quàm in reliquis. Ostendetur enim ut suprà momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in H, esse in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB; Quæ ratio si referatur ad lineam BA seu ad basim Cunei, eadem erit quæ composita rationum quadrati lineæ compositæ ex AC & AB ad quadratum lineæ compositæ ex eadem AB & AH, plus rectanguli sub lineis AH, CB ad rectangulum sub lineis AC, BH. *Fig. 6. Tab. 17.*

Sit enim AQ æqualis AB, & erit ex proprietate Parabolæ CN ad HK ut rectangulum QCB ad rectangulum QHB, & ut quadratum CN ad quadratum HK, sic quadratum rectanguli QCB ad quadratum rectanguli QHB, id est, ut linea QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus CB ad HB. Sed ratio rectanguli AHB ad rectangulum ACB, eadem est quæ ratio linearum AH ad AC, plus HB ad CB: Ergo ratio momenti resistentiæ Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus linearum QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus CB ad HB, plus AH ad AC, plus HB ad CB. Sed rationes CB ad HB, plus HB ad CB sese mutuò destruunt; Relinquuntur ergo rationes QC ad QH, plus QC ad QH, plus CB ad HB, plus AH ad AC; Quæ componunt etiam rationem quadrati QC ad quadratum QH, & rectanguli AH, CB, ad rectangulum AC, BH. Sed quadratum QC æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB & AC, quadratum verò QH æquale quadrato lineæ compositæ ex AB & AH. Ergo ratio momenti resistentiæ Cu-

Cunei Parabolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componitur ex rationibus quadrati lineæ compositæ ex AB & AC ad quadratum compositæ ex eadem AB & AH, & rectanguli sub lineis AH, CB ad rectangulum sub lineis AC, BH. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Atque ex istis omnibus patet ratio, cur nimiam quam in Galilæum habebas fiduciam experimenta tua deluserint. Tantum enim abest ut illa sectio Parabolica, quocunque tandem modo trabibus secundùm altitudinem adhibeatur, æquet in illis utrinque fultis momenta resistentiæ; quin illa potiùs in infinitum dimovere possit atque diducere; etiamsi id semper verissimum sit tertiam ponderis & molis partem per Parabolas in trabe resecari.

PROPOSITIO OCTAVA.

Fig. 7. *Tab.* 17. Sed nec ista momentorum æqualium proprietas sectioni hyperbolicæ conveniet. Nam si trabs AE secetur primò per semihyperbolam ANKR sub transversâ diametro QA, Axe AB, & amplitudine BR, unde Cuneus hyperbolicus oriatur BANRELSG. Erit momentum resistentiæ in C ad momentum in H, ut est rectangulum sub QC & HB ad rectangulum sub QH & CB. Nam, ut suprà, demonstrabitur momentum in C ad momentum in H esse in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB. Sed ex proprietate hyperboles quadratum CN est ad quadratum HK ut rectangulum QCA ad rectangulum QHA: Ergo momentum est ad momentum in ratione compositâ rectangulorum QCA ad QHA & AHB ad ACB. Sed ratio rectanguli QCA ad QHA eadem est quæ linearum QC ad QH, & AC ad AH; ratio verò rectanguli AHB ad ACB eadem est quæ linearum AH ad CA,

plus

plus HB ad CB : Et ratio AC ad AH destruit rationem AH ad CA : Ergo momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, est in ratione compositâ linearum QC ad QH, plus HB ad CB ; Quæ quidem est ratio rectanguli QC, HB ad rectangulum QH, BC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO NONA.

Si vero idem Prisma AE secetur per duas semihyperbolas contrariè positas AKQ, BNQ, quarum axis communis AB, amplitudo eadem GQ, & transversæ diametri æquales AV, BX, quæ se in trabis medio Q secantes, Solidum in illâ efficiant AKQNBTRS deinceps Cuneatum hyperbolicum. Idem prorsùs eveniet quod suprà, eritque momentum resistentiæ in C ad momentum resistentiæ in H, ut est rectangulum sub XC & HB ad rectangulum sub VH & AC. Est enim ratio momenti resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex rationibus momenti in C ad momentum in G, & momenti in G ad momentum in H. Et ratio momenti in C ad momentum in G componitur ex rationibus rectanguli AGB ad rectangulum ACB, plus quadrati CN ad quadratum GQ, id est ; (ex proprietate hyperboles) rectanguli XCB ad rectangulum XGB. Sed ratio rectanguli AGB ad rectangulum ACB, eadem est quæ linearum AG ad AC, plus GB ad CB ; Ratio verò rectanguli XCB ad rectangulum XGB, eadem quæ linearum XC ad XG, plus CB ad GB : Et ratio GB ad CB destruit rationem CB ad GB : Ergo ratio momenti resistentiæ in C ad momentum in G, componetur ex rationibus AG ad AC, plus XC ad XG, quibus etiam componitur ratio rectanguli XC, AG ad rectangulum XG, AC. Eodem modo demonstrabitur rationem momenti resistentiæ in G ad momentum resistentiæ in H, eandem esse quæ rectanguli VG, BH vel XG, BH

Fig. 8. Tab. 17.

BH ad rectangulum VH, AG: Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, componetur ex rationibus rectangulorum XC, AG ad XG, AC, plus XG, BH ad VH, AG: Sed ista rationum compositio eadem est quæ compositio rationum rectangulorum XC, AG ad VH, AG, plus XG, BH ad XG AC, id est, (propter communes altitudines AG & XG) eadem quæ compositio rationum linearum XC ad VH, plus BH ad AC: Ergo momentum resistentiæ Solidi deinceps Cuneati hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, est in ratione compositâ ex rationibus linearum XC ad VH & BH ad AC, id est, rectanguli XC, BH ad VH, AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DECIMA.

Fig. 1. *Tab.* 18. Quod si Trabs AE secetur per integram hyperbolam AKQNB cujus axis sit GQ, transversa diameter QV, & opposita sectio IVZ; erit adhuc intricatior ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici AQBDRY in C ad momentum ejusdem in H. Si enim producantur lineæ CN, HK, donec occurrant oppositæ sectioni in Z & I; demonstrabitur rationem momenti in C ad momentum in H, eandem esse quæ rectanguli sub lineis IH, CN ad rectangulum sub lineis ZC, HK. Nam, ut suprà, ostendetur rationem momentorum componi ex rationibus quadratorum CN ad HK, plus rectangulorum AHB ad ACB. Sed ex proprietate hyperboles rectangulum AHB ad rectangulum ACB, est ut rectangulum IHK ad rectangulum ZCN: Erit ergo ratio momenti in C ad momentum in H composita ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli IHK ad rectangulum ZCN. Rursùs demonstratum est ab aliis idem esse compositum rationum quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli IHK ad rectangulum ZCN, quod compositum rationum quadrati

CN

CN ad rectangulum ZCN, id est, lineæ CN ad lineam ZC, & rectanguli IHK ad quadratum HK, id est, lineæ IH ad lineam HK: Est ergo ratio momenti resistentiæ Solidi hyperbolici in C ad momentum resistentiæ ejusdem in H, composita ex ratione lineæ CN ad ZC, plus ratione lineæ IH ad HK; quibus etiam componitur ratio rectanguli IH, CN ad rectangulum sub lineis ZC, HK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO UNDECIMA.

DENIQUE, si Trabs AE per semihyperbolam FKNB secetur, cujus Axis AF, transversa diameter FV, & opposita sectio VIZ, oriatúrque alter Cuneus hyperbolicus AFNBGLD; erit intricatissima ratio momentorum resistentiæ ejusdem in diversis punctis C & H. Nam si extendantur lineæ CN, HK, ut in superiori propositione, donec occurrant oppositæ sectioni in Z & I, erit ratio momenti resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, composita ex rationibus rectanguli sub lineis IH & CN ad rectangulum sub lineis ZC, HK, plus rectanguli sub compositâ ex tota AB & parte AC in lineam AH, ad rectangulum sub compositâ ex eadem AB & parte AH in lineam AC. Sit AQ æqualis AB, ostendetur, ut suprà, momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, esse in compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB: Sed ratio quadrati CN ad quadratum HK componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum AF, & quadrati AF ad quadratum HK; ratio verò quadrati CN ad quadratum AF componitur rursùs ex ratione quadrati CN ad rectangulum ZCN (id est, propter CN communem altitudinem,) lineæ CN ad lineam ZC, plus ratione rectanguli ZCN ad rectangulum QCB, id est (ex proprietate hyperboles) rectanguli VAF ad quadratum AB, plus ratione rectanguli QCB ad quadratum AB, plus ratione quadrati AB ad rectangulum VAF, *Fig. 2. Tab. 18.*

R &

& tandem plus ratione rectanguli VAF ad quadratum AF, id est, (propter AF communem altitudinem) lineæ VA ad lineam AF: Atqui ratio rectanguli VAF ad quadratum AB destruit rationem quadrati AB ad rectangulum VAF. Supereſt ergo ut ratio quadrati CN ad quadratum AF componatur ex rationibus lineæ CN ad lineam CZ, plus rectanguli QCB ad quadratum AB, plus lineæ VA ad lineam AF; quibus etiam componuntur rationes rectanguli VA, CN ad rectangulum CZ, AF & rectanguli QCB ad quadratum AB. Eodem argumento demonſtrabitur rationem quadrati AF ad quadratum HK componi ex ratione rectanguli IH, AF ad rectangulum VA, HK, plus ratione quadrati AB ad rectangulum QHB: Ergo ratio quadrati CN ad quadratum HK componetur ex ratione rectangulorum VA, CN ad CZ, AF, plus QCB ad quadratum AB, plus quadrati AB ad rectangulum QHB, plus rectanguli IH, AF ad VA, HK; id eſt, ex rationibus rectangulorum VA, CN ad CZ, AF, plus QCB ad QHB, plus IH, AF ad VA, HK. Sed quod exurgit ex compoſitione rationum rectangulorum VA, CN ad CZ, AF, plus IH, AF ad VA, HK, æquale eſt ei quod exurgit ex compoſitione rationum rectangulorum VA, CN ad VA, HK, id eſt, (propter VA communem altitudinem) lineæ CN ad lineam HK, plus IH, AF ad CZ, AF, id eſt, (propter AF communem altitudinem) lineæ IH ad lineam CZ, quæ quidem conficiunt rationem rectanguli IH, CN ad rectangulum CZ, HK: Ergo ratio quadrati CN ad quadratum HK componetur ex rationibus rectangulorum IH, CN ad CZ, HK, plus QCB ad QHB: Ergo ratio momenti reſiſtentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejuſdem in H componetur ex rationibus rectangulorum IH, CN ad CZ, HK, plus QCB ad QHB, plus AHB ad ACB: Sed ratio rectanguli QCB ad QHB eadem eſt quæ linearum QC ad QH, plus CB ad HB; ratio verò rectanguli AHB ad ACB eadem quæ linearum AH ad AC, plus HB ad CB. Quæ quidem ratio

HB.

HB ad CB destruit rationem linearum CB ad HB. Est ergo momentum resistentiæ Cunei hyperbolici in C ad momentum ejusdem in H, in ratione compositâ rationum rectanguli IH, CN ad rectangulum CZ, HK, plus linearum QC ad QH, plus AH ad AC, (id est, rectanguli QC, AH ad rectangulum QH, AC,) id est, rectanguli sub lineâ compositâ ex AB & AC in AH, ad rectangulum sub compositâ ex eadem AB & AH in lineam AC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DUODECIMA.

Neque etiam ista momentorum æqualitas in Trabe, per quadrantem Circuli aut Ellipseos sectâ, reperietur. Nam si sub semidiametris AF, AB quadrans Circuli aut Ellipseos FNKB describatur, qui secans Trabem AE producat Cuneum circularem aut ellipticum AFNKBGOD, sitque tota diameter BQ. Facilè ostendetur momentum resistentiæ Cunei in C ad momentum ejusdem in H, esse ut rectangulum sub compositâ ex totâ AB & ex parte AC in AH, ad rectangulum sub compositâ ex totâ AB & ex parte AH in AC. Nam ratio momenti resistentiæ Cunei elliptici seu circularis in puncto C ad momentum resistentiæ ejusdem in puncto H, componitur ex rationibus quadrati CN ad quadratum HK, plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB. Sed propter Circulum aut Ellipsim quadratum CN est ad quadratum HK ut rectangulum QCB ad rectangulum QHB: Ergo ratio momenti resistentiæ in C ad momentum in H, componitur ex rationibus rectanguli QCB ad rectangulum QHB, plus rectanguli AHB ad rectangulum ACB, id est, (uti demonstratum est ab aliis) ex rationibus rectanguli QCB ad rectangulum ACB, plus rectanguli AHB ad rectangulum QHB; id est, (propter communes altitudines CB & HB) ex rationibus linearum AH ad QH, plus QC ad AC; quæ quidem faciunt rationem rectanguli AH, QC ad rectangulum AC, QH, seu rectanguli *Fig 3. Tab. 18.*

 sub

sub AH & compositâ ex totâ AB & parte AC, ad rectangulum sub AC & compositâ ex totâ AB & parte AH. Est ergo momentum resistentiæ Cunei circularis aut elliptici in C ad momentum ejusdem in H, ut rectangulum sub compositâ ex AB & AC in AH ad rectangulum sub compositâ ex AB & AH in AC. Quod erat demonstrandum.

Nunc verò (mi VV.) quanti æstimâris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis & molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua, momenta verò resistentiæ ubique in residuo supersint æqualia? Illud puto, gratissimum tibi erit, & tibi in mechanicis atque organicis assiduè versanti, opis haud omninò contemnendæ. Sed quantò acceptius id erit tibi atque jucundius, quòd à viro tui amantissimo, & qui te magnopere colit, id continget? Enimverò iis quæ in nos amici conferunt beneficiis, nexu duplici nos obligari par est átque obstringi.

PROPOSITIO DECIMA-TERTIA.

Age igitur, & quod sectioni parabolicæ, imò & hyperbolicæ, atque quadranti circuli aut ellipseos, denegavimus; circulari profectò aut ellipticæ meritò concedamus: istæ enim sectiones id prorsùs efficient, quod præstare Parabolam Galilæus perperam asseruerat.

Fig. 4.5. *Tab.* 18. Nam si duabus lineis AG vel GB & GQ tanquam semidiametris, describatur semicirculus AQB, si eæ sint æquales; vel semiellipsis, si sint inæquales; & per hanc vel illam Trabs AE secundùm altitudinem ita secetur, ut fiat Solidum circulare, vel ellipticum AQBTRS: Ejus sanè momenta resistentiæ erunt ubique æqualia, &, quod pondus frangit in C Solidum utrinque fultum, illud etiam idem rumpet in H. Etenim momentum resistentiæ in C Solidi sive circularis sive elliptici, est ad momentum resistentiæ ejusdem in H, in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB: Sed propter Cir-

Circulum aut Ellipsim quadtatum CN est ad quadratum HK, ut rectangulum ACB est ad rectangulum AHB: Ergo ratio momenti resistentiæ Solidi in C ad momentum ejusdem in H, componetur ex rationibus rectanguli ACB ad rectangulum AHB, & rectanguli AHB ad rectangulum ACB: Sed istæ rationes faciunt rationem æqualitatis: Ergo momenta in C & H erunt æqualia. Et hoc in omnibus Solidi punctis concludetur, unde patet ubique propositum.

Sic (mi VV.) petitioni tuæ satisfecisse me puto, nisi quòd hæc, quam ad te paucis verbis scribere cogitaveram, in ingentem ac penè fastidiosam molem, Epistola creverit. Sed hæc omnia ità exarare oportuit, tùm ut rem tibi gratam faciam, si quidpiam boni tibi communicaverim, tùm etiam ut habeas, quòd amicè me admoneas, si quid minùs cautè scripserim. Quippe non mirum profectò fuerit, iisdem me in grumis scrupisque collabi, in quos ipse Galilæus impegerit. Quare etiam atque etiam te rogo, ad me quamprimùm rescribe quid sentias, factis præsertim eâ quâ soles sedulitate atque solertiâ experimentis. Ego verò non committam posthâc ut de meâ negligentiâ conqueraris. Vale. Datum Farræ Viromanduorum pridie Idus Sextiles A. D. MDC. LVII.

SECOND DISCOURS.

OU

LETTRE AU Sr B. POUR LA résolution de ses doutes sur les Propositions du premier Discours.

MONSIEUR. Je vous suis parfaitement obligé du soin que vous avez pris, de me donner part des remarques, qui ont

esté faites sur une Lettre, que j'écrivis il y a quelques années à un de mes Amis en Suede, & dont je vous avois laissé une copie, sur lesquelles il ést bien raisonnable que je vous éclaircisse. Et pour y répondre par ordre & ne vous y laisser aucun sujet de douter, je veux premiérement vous faire ressouvenir de ce que vous m'avez fait la grace de marquer, ou faire marquer par vos amis, a la marge de mon écrit, à costé des choses que je n'y avois pas assez clairement expliquées.

I. *Fig.* 1. *Tab.*17. La premiére des remarques ést sur la seconde Proposition, où je dis que les momens de la résistance du Coin ou Prisme triangulaire FABG, que je suppose estre soustenu sur ses deux extrémitez A & B, sont entre-eux, comme les rectangles sous les parties alternes de la base AB; c'est à dire, que le moment de la résistance en C est au moment en H, comme le rectangle des parties AH, CB est au rectangle des parties AC, BH. Et pour le démontrer, je me sers de ces termes, que je rapporte en la Langue qu'ils sont écrits, parce que les notes sont aussi Latines : *Sed ratio momenti resistentiæ Cunei in C ad momentum trabis in eodem C, est* ✠ *ex Galilæo, ut quadratum CN ad quadratum CP seu AF, (id est, ut quadratum CB ad quadratum AB,) componitur enim ex rationibus partium Solidi contentarum* ✠ *in superficiebus CO & CI, quæ sunt inter se ut superficies, id est, (propter communem altitudinem NO, IP,) ut lineæ CN, CP, & ex ratione distantiarum actionis earumdem, quæ etiam sunt ut eædem lineæ CN & CP.* Sur quoy dans le texte l'on a tiré des lignes, & fait des petites Croix, ainsi qu'il se voit icy. Et vis-à-vis de la premiére il est écrit à la marge, *Hoc falsum, est enim ut CN ad CP seu AF, ex Galilæo.* Et à l'endroit de la seconde, *Hoc non consideravit Galilæus, nec debet considerari in resistentiâ.* Un peu plus bas, où je dis sur la mesme Proposition : *Et tandem ratio momenti resistentiæ Trabis in H ad momentum resistentiæ Cunei in eodem H, est*

est ut quadratum HM seu AF ad quadratum HK, il y a à la marge, *Falsum ob eandem rationem.*

La seconde est sur la troisiéme Proposition, où je dis: *Sed demonstrabitur ut suprà momentum Cunei in C ad momentum ejusdem in G, esse in ratione compositâ quadrati lineæ CN ad quadratum lineæ GQ, & rectanguli, AGB ad rectangulum ACB.* Il y a à costé, *Falsum, sunt enim ut lineæ ut suprà, & sic in sequentibus, quod ubique notandum. Hoc solummodò verum esset, si non solùm trabs minueretur secundùm unam dimensionem, ut in casibus Galilæi & Censoris, ut patet ex omnibus ejus figuris, sed secundùm duas dimensiones: At nullus hunc casum unquam inquisivit.* II. *Fig.* 3. *Tab.* 17.

Dans la quatriéme Proposition, où j'explique la différence des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Coin Parabolique, il y a à la marge: *Hæc & sequentia, in quibus aut dimidium, aut quadrans figuræ datur Trabi, superflua sunt; cùm satis pateat, quandoquidem trabs ex utraque extremitate sustinetur æqualiter, debere ex utraque parte trabem, figuram uniformem habere, non verò ex unâ crassam, ex aliâ tenuem. Quare quæ de dimidiâ Parabolâ & Hyperbolâ, quæ de quadrante Circuli aut Ellipseos adducit, inutilia sunt, præterquamquod eodem semper Paralogismo omnia laborant.* III. *Fig.* 2. *Tab.* 17.

Dans la sixiéme Proposition, où il est parlé des momens de la résistance d'un Solide, que j'appelle Parabolique, il y a à costé: *Hæc figura suppositis supponendis est ea quam assignare debebant & Galilæus & Censor, abstrahendo scilicet à gravitate trabis, ut in hac omni inquisitione hypotheticâ abstrahi debet, alioquin fit Paralogismus. Multa notanda forent pro reductione ad praxim, si quis hæc aliter quàm hypotheticè vellet sumere, secundùm enim materiæ diversitatem pleraque falsa invenirentur, & vix ullius usus hoc esse potest, nisi in navibus, & aliis machinis, in quibus levitas consideranda foret.* IV. *Fig.* 5. *Tab.* 17.

A la fin de la douziéme Proposition, où je dis: *Nunc verò (mi VV.) quanti æstimaris, si quis eam te figuram edoceat, quâ non tertia quidem ponderis aut molis portio auferatur, sed illa saltem non exigua.* L'on a écrit à costé: *Tertia pars è verâ figurâ aufertur.* V.

En-

VI. Enfin, lors que je dis dans la dernière Proposition, que *Momentum in C sive Elliptici sive Circularis Solidi, est ad momentum resistentiæ in H, in ratione compositâ quadrati CN ad quadratum HK & rectanguli AHB ad rectangulum ACB*, il y a encore à la marge, *Falsum*. Et où je dis ensuite: *Ergo momenta in C & H erunt æqualia*, il y a encore, *falsum*.

Tab. 18. *Fig.* 4. 5.

Voilà, Monsieur, les Observations que j'ay trouvées dans l'écrit que vous m'avez renvoyé, & que j'ay marquées par nombres, afin de les sçavoir plus facilement distinguer l'une de l'autre dans le discours. Elles sont veritablement judicieuses & importantes, & si vray-semblables, qu'à moins de s'y appliquer sérieusement, & d'en faire une exacte discussion, il est malaisé de les résoudre, & de se déveloper de l'embarras qu'elles vous ont produit.

Pour les traiter avec quelque ordre, il paroist que la 1. 2. 5. & 6. sont celles qui contiennent le nœud de la difficulté, sur lesquelles il faudra par conséquent que je m'étende un peu davantage que sur les autres. Car pour la 3. où l'on dit que toutes les Propositions où je parle des Poutres, qui ne reçoivent que la moitié ou le quart de la figure, sont superfluës, puis que l'on voit assez que la Poutre estant soûtenuë par ses deux bouts, doit avoir une figure uniforme, & n'estre pas grosse par une extrémité, & menuë par l'autre; en sorte que tout ce que j'ay rapporté de la demy-Parabole, de la demy-Hyperbole, & du quart de Cercle, ou d'Ellipse, est absolument inutile.

Il me semble que j'ay quelque droit de dire, que je ne vois pas bien qu'il paroisse si clairement comme vous dites, qu'une Poutre soûtenuë des deux bouts doive estre de figure uniforme, puis, qu'à mon avis, deux murs se peuvent rencontrer d'une inégale épaisseur, & dont l'un seroit assez fort pour porter le plus gros bout d'une Poutre inégale; & l'autre plus foible ne pourroit souffrir le poids que d'un plus alegé: Et la question pourroit cependant estre faite sur cette hypothese; Quels seroient les momens de la résistance de cette Poutre, selon la difference de ses parties?

Ou-

Outre qu'ayant esté proposé sous une de ces figures par M. Galilée, sçavoir sous celle de la demy-Parabole, que j'ay appellée Coin Parabolique; il estoit bien juste que je parlasse des veritables proportions des momens de la résistance de ce Solide, pour faire voir en quoi, & de combien il s'estoit équivoqué dans celles qu'il luy avoit attribuées.

Joint qu'enfin, si nous en croyons les anciens Maistres du Métier, c'est faire injure à la dignité des Sciences Speculatives, que de ne mesurer leur estime qu'à l'utilité que les Ouvriers en reçoivent, quand ils appliquent à la matiére, & avec les imperfections qui l'accompagnent inséparablement, la subtilité de leur doctrine & de leurs démonstrations.

Et pour la 4^e^ remarque où vous dites que le Solide Parabolique, duquel je parle dans ma 6^e^ Proposition, est celuy que nous devions avoir proposé & M. Galilée & moy; je n'ay rien à y répondre, puis qu'il paroist que j'y ay satisfait de ma part en le considerant, & que je ne suis pas responsable des faits de M. Galilée. Que si l'on dit que nous le divions rapporter tout seul, sans parler aucunement des autres; je me remets à ce que je viens de dire sur la 3^e^ Observation, & à ce qui sera cy-dessous expliqué sur toutes les autres.

L'on dit ensuite qu'il faut faire abstraction du propre poids du Solide dans toutes mes Propositions, comme dans celle de M. Galilée, puis qu'autrement il y auroit Paralogisme. J'en demeure d'accord aussi-bien que M. Galilée, qui s'en est assez fait entendre avant que d'entrer en cette matiére, quand il dit: *Quello che ricerca più sottile specolazione è quando astraendo d'alla gravità propria di tali Solidi, ci fusse proposto di dover investigare, se quella forza ò peso che applicato al mezo d'un Cilindro sostenuto nelle estremità, basterebbe à romperlo, potrebbe far l'istesso applicato in qualsivoglia altro luogo più vicino all'una che all'altra estremità.* Et comme je n'ay fait que marcher sur ses pas, j'ay crû que je pouvois librement supposer toute sa doctrine, sans estre obligé de remplir mon papier

S de

de ce qui se trouvoit pleinement expliqué dans son Livre.

Enfin, sur ce que l'on ajoûte qu'il y auroit beaucoup de choses à remarquer, si l'on vouloit mettre ces Propositions en pratique, & que la diversité de la matiére y feroit trouver beaucoup de déconte : Comme c'est une plainte qui s'est faite de tout temps contre les Propositions Mathematiques, que l'imbecillité de la matiére ne peut jamais recevoir ny souffrir avec exactitude ; je me tiens à ce qui y a esté répondu par les Grand Hommes des siécles passez, & à ce que l'expérience nous enseigne de la perfection des Arts, qui n'ont d'excellence, qu'autant que leurs Ouvrages se trouvent approcher de plus prés de la beauté des Idées, que les démonstrations de la Théorie ont produites.

Je diray seulement, sur ce que l'on a écrit, que toutes ces méditations ne peuvent gueres avoir d'autre usage qu'aux Navires, & aux autres machines mobiles, où l'on recherche la légereté : Que cela n'est pas tout-à-fait le sentiment de quelques personnes assez entenduës au Bastiment, à qui je me souviens d'avoir oüi dire, que si ce n'estoit le ver qui ronge le bois, ils aimeroient beaucoup mieux se servir de Poutres de sapin, dans les lieux où l'humidité n'est pas à craindre, que de celles de Chesne, seulement parce que celles-là ne chargent pas tant les murailles que celles-cy.

Toutes les autres remarques, qui contiennent en effet le nœud de la difficulté, & qui sont quasi toutes d'un mesme sens, & fondées sur un mesme principe, disent que les momens de la résistance en un mesme point, tant de la Poutre que du Solide qui luy est inscrit selon sa hauteur, ne sont pas entre eux, comme les Quarrez des lignes perpendiculaires à la base commune, comprises & en l'une & en l'autre, ainsi que je l'ay rapporté de M. Galilée, mais qu'il sont seulement dans la raison de ces mesmes lignes ; c'est à dire, que les momens de la Poutre & du Solide Parabolique, par exemple en C, ne sont pas, selon Galilée, comme les Quarrez des lignes CP & CN, mais seulement comme *Fig. 5. Tab. 17.*

ces

ces mesmes lignes CP & CN: Puisque M. Galilée n'y a aucunement consideré la quantité des parties, qui se doivent separer l'une de l'autre, dans les surfaces CI & CO; & qu'en cette sorte de résistances, on n'y doit avoir aucun égard. Qu'au reste, cela seroit bon, s'il se faisoit diminution de plus d'une dimension dans ces Solides, & non pas d'une seule, comme il paroist dans toutes mes figures, personne n'ayant jamais recherché ce qui arriveroit en l'autre cas.

Sur quoi je dois vous dire premiérement, que quelque soin que j'aye pris de relire mon Galilée, je n'ay pas pû comprendre par aucun de ses raisonnemens, qu'il ait jamais eû la pensée (non pas mesme dans l'hypothese, que ses Solides soient fichez par un bout, & que le poids pende librement à l'autre) de dire que les momens de la résistance de la Poutre & d'un Solide inscrit, fussent en un mesme point entre eux, comme les lignes perpendiculaires à la base commune, comprises en l'un & en l'autre; Puisque dans la démonstration qu'il fait du Prisme triangulaire, il dit bien que le moment de sa résistance en C est au moment de sa résistance en A, comme la ligne CB est à la ligne BA, ou comme CN est à AF ou CP; Mais il ne dit pas que le moment de la résistance du Prisme triangulaire en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au mesme point C, comme la ligne CN est à la ligne CP. *Fig. 1. Tab. 17.*

Et dans celle qu'il rapporte du Solide Parabolique, il n'a jamais voulu que le moment de sa résistance, par exemple en C, soit au moment de la résistance de la Poutre AE au mesme point C, comme la ligne CN est à la ligne CP: mais au contraire, que le moment de la résistance du Coin Parabolique en C, est à son moment en A, comme le quarré de CN est au quarré de AF ou CP; puis qu'il ne peut pas autrement démontrer que les momens de la résistance en A & C, & par tout ailleurs, sont égaux, s'il ne suppose que la Composition des raisons de la résistance de AD & CO, & de leurs distances, (qui sont entre el- *Fig. 2. Tab. 17.*

les comme les moitiez des lignes AF & CN) est égale à la Composition des raisons de la mesme puissance pendante en B, & agissante tantost avec la distance AB, & tantost avec la distance CB, lesquelles sont entre elles comme les quarrez des lignes AF ou CP & CN.

Je dis mesme dans l'Hypothese de M. Galilée, qui veut par sa démonstration qu'en l'une & en l'autre des Figures, le Solide soit fiché dans la muraille par un bout, tantost en A & tantost en C; & que l'autre extremité B, à laquelle le poid est attaché, soit toûjours libre en l'air, sans estre aucunement soûtenuë. Bien loin de l'avoir dit dans l'autre supposition, qui veut que les Solides soient soûtenus par les deux extrêmes, & que la puissance agisse entre eux, ou qu'ils soient appuyez en quelque point entre lesdits extrêmes, sur lesquels la puissance fasse son effort: Et dans cette Supposition il n'a jamais rien dit d'approchant sur cette matiére.

Je ne sçay pas aussi sur quel fondement l'on a pû dire que M. Galilée n'a jamais consideré dans la résistance les parties qui se doivent séparer l'une de l'autre dans les surfaces CI & CO, puis qu'il n'y a rien qu'il ait plus particuliérement expliqué.

Et il faut à ce propos que je vous avertisse en passant d'une difficulté qui se rencontre dans son premier Livre, où voulant enseigner une maniére tout-à-fait ingenieuse, pour sçavoir la mesure de la plus grande longueur à laquelle les Verges ou Cylindres de toutes sortes de grosseur & de matiére, se peuvent étendre sans se rompre d'eux-mesmes.

Piglisi (dit il) *per essempio un fil di rame di qualsivoglia grossezza é lunghezza, è fermato un de i suoi capi ad alto, si vadia aggiungnendo all' altro maggior è maggior pezo, si che finalmente si strappi, è sia il peso massimo che potesse sostenere V. G. cinquanta libre. E' manifesto che cinquanta libre di rame oltre al proprio peso, che sia per essempio un ottavo d'oncia, tirato in filo di tal grossezza, sarebbe la lunghezza massima del filo che se stesso potesse reggere. Misurisi poi quanto era lun-*

lungo il filo che si strappò, è sia V. G. un braccio. E perche peso un ottavo d'oncia, é resse se stesso è cinquanta libre appresso che sono ottavi d'oncia quattro mila ottocento: Diremo tutti i fili di rame di qualunche sia la lor grossezza, poter si reggere sino à la lunghezza di quattro mila ottocento è un braccio, è nò più.

La difficulté consiste, en ce qu'il ne se voit pas bien claire-ment qu'il ait dû, d'une expérience singuliére, sur un fil d'une grosseur déterminée, tirer une conséquence si génerale qu'il a faite par ces mots, *Diremo tutti i fili di rame*, &c. Ce qui est pourtant veritable, parce que tous ces fils ou Cylindres estans de mesme longueur, ils sont entre eux comme leurs bases, & partant les poids qui sont entre eux comme les Cylindres seront en la mesme raison de leurs bases; mais les résistances sont aussi en mesme proportion des bases; donc les poids & les résistances seront en mesme raison, & les poids seront à leur résistance, chacune à la sienne, en mesme proportion: Mais l'un de ces poids est supposé égal à sa résistance par la construction; Donc tous les autres poids seront aussi égaux à la resistance de leurs Cylindres, prise en la maniére qu'ils se répondent l'un à l'autre.

Mais laissant ce discours, qui sera beaucoup mieux éclairci dans la suite, il faut maintenant venir au fait, & vous bien faire connoistre deux choses; la premiére, que j'ay eû juste sujet de dire que M. Galilée a pû s'estre laissé surprendre, non pas en démontrant, selon son hypothese, que les momens de la résistance de son Solide Parabolique en tous ses points sont égaux, & que ce qui reste de la Poutre aprés que ce Solide en est osté, fait justement la troisiéme partie de la Poutre; mais en ce qu'ayant fort bien démontré l'une & l'autre de ces deux propriétez dans un Solide fiché par un bout & l'autre libre, il a crû qu'il pouvoit en attribuer la premiére au mesme Solide lors qu'il seroit soûtenu par ces deux bouts.

L'autre, que j'ay légitimement démontré les veritables propriétez des Solides, que j'ay considerez dans mon Livre, & que je

n'ay fait aucun Paralogisme, quand j'ay supposé de la doctrine de M. Galilée, que les momens de la résistance du Solide inscrit & de la Poutre en un mesme point, lors que l'un & l'autre estoient soûtenus par les deux bouts, sont entre eux comme les quarrez des lignes perpendiculaires à leur base commune, comprises en l'un & en l'autre.

Et pour vous oster tout scrupule sur ces deux choses, il faudra vous rapporter plusieurs passages du Livre de M. Galilée, afin que vous n'ayez pas la peine de les y aller chercher, & vous entretenir un peu au long de sa doctrine, & de ses Propositions sur le sujet présent de la résistance des Solides.

Il tire donc ses premiéres Idées de la confusion où se trouvent ordinairement les Ouvriers, qui ne rencontrant pas dans les grandes Machines, des effets proportionnez à ceux que les petites Machines, semblables aux premiéres, ont accoustumé de produire; & voyant au contraire que les plus vastes, & celles, dont les piéces qui la composent, sont de plus grande étenduë, ont beaucoup moins de force pour résister aux insultes des accidens du dehors, à proportion que les plus petites & celles dont les membres sont plus resserrez, quoy qu'ils soient entre eux en la mesme raison que les parties des plus grandes; Ils en rapportent la cause à l'inégalité de la matiére, & à l'imperfection de l'Art, comme si des causes si foibles pouvoient suffire à la production des effets si différens, & d'une si énorme difformité.

Mais M. Galilée considerant la chose d'une autre maniére, & aprés une méditation, comme il dit de plusieurs années, a crû à la fin en avoir trouvé les veritables raisons; & argumentant à la façon des Géometres, & sur les anciens principes de la Méchanique, il est le premier qui ait fait connoistre, que les résistances des Solides, c'est à dire, la force qu'ils ont d'eux-mesmes à soûtenir leur propre poids, & résister à la violence des coups du dehors, ne marchoient pas entre elles avec les mesmes proportions que les Gravitez des mesmes Solides: & que celles-cy s'augmentant

tant en la raison, & à mesure que les corps pésans d'une mesme matiére s'agrandissent; la résistance au contraire suivoit une bien moindre proportion, & elle se trouvoit beaucoup affoiblie dans les grands corps, & bien moins capable de soûtenir des efforts, qu'elle n'estoit à proportion dans les moindres.

Je serois trop long, si je voulois vous raconter tout ce qu'il a admirablement écrit sur cette matiére: aussi je me contenteray de vous rapporter ce qui fait à mon sujet, & vous dire premiérement; Que supposant, par exemple, un Cylindre attaché en haut par un de ses bouts, & un poids pendant à l'autre, qui soit petit à petit augmenté de telle sorte qu'il devienne à la fin assez fort pour rompre le Cylindre: Ce poids que j'ay supposé le plus grand de tous ceux que le Cylindre puisse soûtenir sans se rompre, joint au propre poids du Cylindre, s'appelle par M. Galilée, *La mesure de la résistance absoluë de ce Cylindre*, laquelle consiste en la tenacité & attachement des parties contenuës dans les surfaces qui se doivent separer l'une de l'autre par la rupture, & en l'effort que chacune fait en particulier pour demeurer liée & adherente à ses voisines. A.

En suite il dit, que si un Cylindre ou Prisme est fiché par un bout perpendiculairement dans une muraille qui soit à plomb, & qu'à son autre bout on attache le plus grand poids qu'il puisse soûtenir sans se rompre, (faisant abstraction de la propre Gravité du Cylindre) ce poids s'appelle, *La mesure du moment de la résistance du Cylindre en cette position*; & la résistance absoluë est à ce moment de la résistance, comme la longueur du Cylindre est à la moitié du diamétre de la base. B.

De plus, pour démontrer que les momens de la résistance des Prismes ou Cylindres de mesme longueur & de différente grosseur, comme A & B, fichez, comme il a esté dit cy-dessus, dans une muraille, sont entre eux comme les Cubes des diamétres de leurs bases CD, EF, il se sert de ces mots: *Imperò che se consideriamo l'assoluta è semplice resistenza che risiede nelle basi, cioè nè i cherchi E F, C D; all' essere strappati facendogli forza col tirargli per dritto, nò è dub-* *Fig.* 1. *Tab.* 19. C.

dubbio che la resistenza del Cilindro B è tanto maggiore che quella del Cilindro A, quanto il cerchio E F è maggiore del C D, perche tanto più sono le fibre, i filamenti ò le parti tenaci che tengono unite le parti de i solidi. Mà se consideriamo che nel far forza per traverso ci serviamo di due leve, delle quali le parti ò distanze dove si applicano le forze sono le linee D G, F H; i sostegni sono ne i punti D F: Mà le altre parti ò distanze dove son poste le resistenze, sono i semidiametri de i cerchi D C, E F; perche i filamenti sparsi per tutte le superficie de i cerchi, è come se tutti si riducessero ne i centri. Considerando, dico, tali leve, intenderemo la resistenza nel centro della base E F contro alla forza di H, essere tanto maggiore della resistenza della base C D contro alla forza posta in G, (è sono le forze in G & H di leve eguali D G, F H) quanto il semidiametro F E è maggiore del semidiametro D C: Cresce dunque la resistanza all' essere rotta nel Cilindro B sopra la resistenza nel Cilindro A, secondo amendüe le proportioni de i cerchi E F, D C è de i lor semidiametri, &c. c'est à dire, en raison triplée des diamétres.

Ce que j'ay bien voulu vous rapporter tout au long, pour faire voir que M. Galilée a toûjours consideré dans les momens de la résistance des Solides, & les parties contenuës dans les surfaces qui doivent estre separées, & la distance de leur action; ne voulant pas m'arrester présentement à vous expliquer à fonds cette proposition, qui prise en un sens & crûëment, est paralogistique; me réservant à vous en entretenir plus au long une autrefois, d'autant plus volontiers, que cette réflexion ne fait rien du tout à nostre sujet.

Monsieur Galilée rapporte par aprés quantité de merveilleuses propriétez des Cylindres de toutes sortes de grosseur & de longueur, égaux & inégaux, semblables & dissemblables; & toûjours dans la mesme hypothese, qu'ils soient attachez par un bout à un mur, & que l'autre s'étende librement en l'air, sans estre soûtenu d'aucune chose.

Aprés quoy il entre en une autre consideration à leur égard; & recherchant ce qui arrive aux Cylindres soûtenus sur les deux bouts, ou

ou ſur un point pris entre les extrémitez, il dit: *Che il Cilindro che gravato dal' proprio peſo ſara ridotto alla maſſima lunghezza oltre alla quale più non ſi ſoſterrebbe, ò ſia retto nel mezzo da un ſol ſoſtegno, ò verò di due nell' eſtremità potra eſſer lungo il doppio di quello che ſarebbe ſitto nel muro, cioè ſoſtenuto in un ſol termine. Il che per ſe ſteſſo è aſſai manifeſto, perche ſe intenderemo del Cilindro ch'io ſegno A B C, la ſua metà A B eſſere la ſumma lunghezza potente à ſoſtenerſi ſtando fiſſa nel termine B, nell' iſteſſo modo ſi ſoſterrà ſe poſita ſoprà il ſoſtegno G ſara contrapeſata d'all' altra ſua metà B C. E ſimilmente sè del Cilindro D E F la lunghezza ſara tale, che ſolamente la ſua metà poteſſe ſoſtenerſi fiſſa nel temine D, è in conſequenza l'altra E F fiſſa nel termino F, è manifeſto che poſti i ſoſtegni H I ſotto le eſtremità D F, ogni momento che ſi aggiunga di forza ò di peſo in E, quivi ſi farà la rottura.* D. *Fig. 2. Tab. 19.*

Et paſſant outre par ſes méditations, il recherche, en faiſant abſtraction du propre poids des Cylindres, quelle proportion les puiſſances ont entre elles, qui peuvent rompre les Cylindres, appuiez ſur les deux extrêmes & faiſant leur effort ſur le milieu, ou ſur un autre point qui ſoit plus proche d'un bout que de l'autre. Sur quoy il démontre que ces puiſſances, qu'il appelle autrement les momens de la réſiſtance du Cylindre, ſont entre elles en proportion reciproque des rectangles faits des parties du coſté, contenuës entre les extrémitez & le point où les puiſſances agiſſent; c'eſt à dire, qu'au Priſme ou Cylindre A B, ſoit qu'il ſoit ſoûtenu tantoſt en C, & tantoſt en D, & que la puiſſance agiſſe des extrêmes A & B; ſoit qu'il ſoit ſoûtenu ſous ſes extrêmes A & B, & que la puiſſance faſſe ſes efforts tantoſt au point D, tantoſt en C; le moment de la réſiſtance en D eſt au moment de la réſiſtance en C, comme le rectangle A C B eſt au rectangle A D B. E. *Fig. 3. 4. Tab. 19.*

D'où il paroiſt, dit-il, qu'en tout Priſme ou Cylindre, le moment de la réſiſtance qu'il a dans ſon milieu, eſt le moindre de tous, & que ces momens s'augmentent toûjours à meſure qu'ils s'éloignent du milieu, & qu'ils approchent de l'un ou de l'autre

 des

F. des extrêmes, & que *nelle travi grandissime è gravi se ne potrebbe levar nò piccola parte verso l'estremità con notabile allegerimento di peso, che ne i travamenti di grandi stanze, sarebbe di commodo è utile non piccolo. E' bella cosa sarebbe il ritrovar quale figura deurebbe haver quel tal solido, che in tutte le sue parti fusse egualmente resistente, tal che nò più facile fusse ad essere rotto da un peso che lo premesse nel mezzo che in qualsivoglia altro luogo.*

Fig. 1. *Tab.* 17. Aprés quoy il dit immediatement, que comme il a démontré que la résistance du Prisme Quadrangulaire DB dans son extrémité AD contre une force agissante en B, est à sa résistance en CI contre la mesme puissance en B, comme la ligne CB est à la ligne AB, c'est à dire, comme CN est à AF. Et qu'au Prisme Triangulaire inscrit FABGD, la résistance en AD contre la force en B, est (ainsi qu'il le démontre en ce mesme endroit) à sa résistance en CO contre la mesme force en B, comme la ligne AB est à CB, ou comme AF est à CN: *Habbiamo dunque* (dit-il) *nel trave ò Prisma DB levatone una parte, cioè la metà segandolo diagonalmente, è lasciato il Cuneo ò Prisma triangolare FBA; è sono due solidi di conditioni contrarie, cioè quello tanto più resiste quanto più si scorcia, è questo nello scorciarsi perde altrettanto di robustezza. Ora stante questo par ben ragionevole, anzi pur necessario che se gli possa dar un taglio, per il quale togliendo via il superfluo rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.*

G.

Fig. 2. *Tab.* 17. Et puis il démontre fort bien en suite, que si la Poutre DB est coupée par une ligne Parabolique FNB, qui fasse le Solide inscrit FABG, sa résistance en AD contre la force en B, sera égale à la résistance en CO contre la mesme puissance en B, & ainsi par tout ailleurs. *Di qui si vede*, dit-il, *come con diminuzione di peso di più di trenta trè per cento, si posson fare i travamenti senza punto diminuir la loro gagliardia, il che ne i navigli grandi in particolare per reggere le coperte puo essere d'utile non piccolo, atteso che in cotali fabriche la legerezza importa infinitamente.* Sagr. *Le utilità son tante che lungo ò impossibil sarebbe il registrarle tutte.*

H.

Ce

Ce sont-là les passages du Livre de M. Galilée, dont j'avois besoin pour mon sujet, que j'ay cottez par lettres Capitales, & d'où vous pouvez facilement connoistre qu'il a crû que les Poutres & les Solides triangulaires, dont il a recherché les proprietez, devoient estre soûtenus par les deux extrêmes, & souffrir l'effort des puissances pressantes sur différentes parties entre les bouts, puisque les textes cottez F & H vous empescheront d'en douter, aussi-bien que tout le raisonnement qui les précede.

Et que néantmoins dans la démonstration qu'il en a faite, il les a absolument supposé fichez par un bout & libres par l'autre, puisqu'il dit clairement, que dans le Prisme DB la résistance en AD contre une force en B, estoit à la résistance en CI contre la mesme puissance en B, comme la ligne CB est à la ligne AB. Ce qui dans cette hypothese peut estre démontré de cette maniére: Et supposé ce qui a esté enseigné par d'autres; Que si deux raisons ont un mesme antécédent, elles seront entre elles comme reciproquement les termes conséquens. Maintenant, la résistance estant la mesme dans les surfaces AD & CI; les raisons de la résistance AD contre une force en B agissante avec la distance AB, & de la résistance CI contre la mesme force en B agissante avec la distance CB, auront un mesme antécédent, sçavoir cette résistance AD ou CI; & partant elles seront entre elles comme reciproquement les termes conséquens; c'est à dire, que la résistance AD contre une force en B, sera à la résistance CI contre la mesme force en B, comme la force en B agissante avec la distance CB, est à la mesme force en B agissante avec la distance AB. Mais comme dans ces momens la force est la mesme, ils seront comme les distances de leur action, c'est à dire, comme la ligne CB à la ligne AB: Donc la résistance en AD contre une force en B, sera à la résistance en CI contre la mesme force en B, comme la ligne CB est à la ligne AB. *Fig. 1. Tab. 17.*

Que si quelqu'un vouloit soûtenir avec opiniastreté, que M. Galilée a supposé dans sa démonstration que le Prisme DB fut *Fig. 1. Tab. 17.*

 soû

soûtenu par ses deux extrêmes, il ne faudra que prendre un autre point comme H, & dire en cette maniére: Le moment de la résistance en C du Prisme DB, est au moment du mesme Prisme en A, comme AB est à CB par l'hypothese de la démonstration de M. Galilée; & par la mesme raison le moment en A est au moment en H, comme la ligne HB est à AB: Donc par égalité le moment de la résistance en C du Prisme DB soûtenu sur ses deux bouts, sera au moment en H, comme la ligne HB est à CB. Mais par une autre démonstration cottée cy-dessus par la lettre E, il a fait voir dans la mesme hypothese que la résistance du Prisme DB en C estoit à la résistance en H, comme le rectangle AHB est au rectangle ACB: Donc le rectangle AHB sera au rectangle ACB comme la ligne HB est à la ligne CB; ou, en prenant AC pour hauteur commune, comme le rectangle AC, HB au rectangle ACB: & par conséquent le rectangle AC, HB sera égal au rectangle AHB, & la ligne AC égale à la ligne AH, la partie au tout. Ce qui est absurde.

J'ay donc eû raison de dire que la démonstration de M. Galilée ne convient pas à sa supposition; & qu'encore qu'il eût fort bien démontré que certaines propriétez appartiennent aux Solides fichez par un bout, & libres par l'autre, il n'a pas eû pour cela aucun droit de dire qu'elles deûssent estre énoncées des mesmes Solides qui seroient soutenus par les deux bouts.

Pour la solution de l'autre difficulté que j'ay gardée pour la derniére, parce que c'est celle de laquelle il paroist que l'on doute le plus, puis qu'en toutes les propositions où elle est supposée, l'on la traitte de faux & de paralogisme. Je veux dire, pour démontrer que les momens de la résistance en un mesme point de la Poutre & du Solide, qui luy est inscrit selon sa hauteur, sont entre eux comme les quarrez des lignes perpendiculaires sur leurs bases communes, qui sont comprises en l'une & en l'autre, c'est à dire, comme les quarrez de leurs hauteurs au mesme point.

Il faut premiérement se souvenir, ainsi qu'il est dit dans le

dis-

discours cotté cy-dessus par la lettre B, que la résistance absoluë d'un Prisme fiché perpendiculairement par un de ses bouts dans un mur, est au moment de la résistance du mesme Prisme en cette situation, (faisant abstraction de la Gravité) comme la longueur du Prisme est au demidiamétre de sa base.

Secondement, Que les résistances absoluës des Solides semblables & de mesme matiére, sont entre elles comme leurs bases; comme il est dit au discours cotté A.

Troisiémement, Qu'un Cylindre ou Prisme, au texte cotté D, reçoit les mesmes propriétez pour sa résistance, soit qu'il pose sur ses extrêmes & que la force agisse en differens endroits entre les bouts, ou qu'il s'appuie en quelque part entre ses bouts & que la puissance fasse son effort sur les extrêmes; puisque c'est de cette sorte que M. Galilée l'a entendu, & qu'il s'en est clairement expliqué dans les discours rapportez cy-dessus au mesme texte D.

Joint que sa proposition, par laquelle il démontre au texte cotté E, que les momens en D & C du Prisme ou Cylindre A B, aux extrémitez duquel A & B, les poids ou puissances agissent, & qui est appuyé tantost en D, tantost en son milieu C, sont entre eux comme le rectangle ACB est au rectangle ADB: Cette proposition, dis-je, se peut aussi, suivant son mesme raisonnement démontrer dans l'autre hypothese, qui veut que le Prisme ou Cylindre soit soûtenu en A & B, & que les poids & les puissances agissent tantost en D, tantost en C: Car supposant le poids F, qui est égal à la résistance en D, estre divisé en deux parties I & H, de telle sorte que I soit à H, comme la ligne DB est à la ligne DA, (afin que le poids I soit égal au moment de la résistance du Prisme AD fiché en A, & le poids H égal au moment de la résistance du Prisme DB fiché en B); & le poids E, qui est égal à la résistance en C, estre divisé en deux moitiez, dont l'une soit G; le poids E sera au poids F, c'est-à-dire, la résistance en C à la résistance en D, en raison composée

Fig. 3. Tab. 19.

Fig. 4. Tab. 19.

 du

du poids E au poids G, du poids G au poids H, & du poids H au poids F. Mais le poids E est au poids G, comme la ligne AB est à CB; le poids G est au poids H, comme la ligne DB est à CB; & le poids H est au poids F, comme la ligne AD est à AB: Donc le poids E sera au poids F, en raison composée de la ligne AB à la ligne CB, de la ligne DB à la ligne CB, & de la ligne AD à la ligne AB: Mais les raisons des lignes AD à AB & AB à CB, sont égales à la raison de la ligne AD à CB: Donc la raison du poids E au poids F, ou du moment en C au moment en D, sera composée des raisons de AD à CB & de BD à CB; c'est a dire, comme le rectangle ADB au quarré CB, ou au rectangle ACB.

Quatriémement, Il est bon de prendre garde qu'en matiére de résistance des Solides, où l'on fait abstraction de leur propre gravité, la variété de leurs figures ne fait effet qu'en tant qu'elles déterminent plus ou moins la distance de l'action de la puissance qui agit contre la résistance, & la grandeur de la surface où se doit faire la rupture, laquelle contient plus ou moins de parties, *Fig.* 1. *Tab.* 20. qui se doivent separer. Je veux dire, que dedans le Solide ABE, le moment de la résistance en C, n'est aucunement alteré, quelque irregularité de figure que l'on donne au Solide, comme celle de APXB; pourveû que le point C, soit toûjours en tous les cas, distant en la mesme maniére des extrêmes A & B, & que la surface CPI, qui contient les parties qui doivent estre divisées l'une de l'autre, soit toûjours la mesme. Et cela est à mon avis assez facile à comprendre, puisque des deux choses, en quoi les Solides sont différens l'un de l'autre, comme sont leurs formes ou figures & leurs propres poids, l'une n'entre point en considération dans les momens de la résistance, & il est fait abstraction de l'autre. Et les deux choses au contraire sur qui roulent toutes les raisons des résistances, c'est à dire, la longueur des leviers, & la quantité & situation des parties résistantes, dans les surfaces où la rupture se doit faire, y demeurent égales, ou plûtost les mesmes en tous les cas.

En

En sorte que l'on pourra facilement juger, que pour déterminer le moment de la résistance en C du Solide difforme APXB, il suffira de faire connoistre celuy du Prisme AE au mesme point C, dont la longueur AB est commune, aussi-bien que la surface CPI, qui est perpendiculaire à la ligne AB, & où se doit faire la rupture sur le point C.

Cinquémement, Puisque par le discours de M. Galilée cotté cy-dessus D, il paroist qu'un Prisme, soûtenu par ses deux bouts ou seulement en son milieu, & qu'on suppose étendu jusqu'à sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe de son propre poids, est le double de celuy, qui n'estant fiché que par un bout, sera aussi alongé autant qu'il se peut sans se casser. Comme si le Prisme AB, soûtenu sur son milieu C, est supposé estre étendu en sa plus grande longueur, sans qu'il se rompe en cette situation; il est, dit M. Galilée, le double du Prisme CB, qui attaché par un de ses bouts en C, sera aussi étendu autant qu'il le puisse estre pour se soûtenir: Puisqu'en cette hypothese le contrepoids que fait toute la partie AC pour tenir en équilibre le Prisme CB, fait à son égard le mesme effet que si le susdit CB estoit fiché dans le mur en C, ne pouvant pas se mouvoir sur le point C, tant en l'un qu'en l'autre cas, sans se rompre. *Fig. 2. Tab. 20.*

Maintenant, si nous prenons la moitié du costé CB comme CE, & faisant abstraction de sa propre Gravité, que nous supposerons estre entiérement ostée; si nous appliquons en E le poids I, qui soit égal à toute cette gravité du Cylindre CB; il est constant qu'il fera le mesme effet qu'auparavant: Et si prenant tout autre point comme D, nous y mettons le poids K, qui soit au poids I, comme la ligne CE est à la ligne CD; il est encore manifeste que les choses demeureront au premier estat, & que le poids K agissant en D avec la distance CD, sera égal à la résistance du Prisme CD contenuë dans la surface CP, soit que le Prisme CD soit fiché dans le mur en C, soit qu'il soit arresté sur le point C par le Prisme CA qui luy contrepése: Et que si l'on prend

prend la ligne CF égale à CD, & le poids L égal à K, aprés avoir aussi fait abstraction de la propre Gravité du Prisme CA & CF, il arrivera encore la mesme chose: Et par conséquent, comme le poids K est la mesure du moment de la résistance du Prisme DC attaché en C, les deux poids égaux K & L seront aussi la mesure du moment de la résistance du Prisme FD appuié en C, lorsque les puissances sont en D & F, ou appuié en D & F, lorsque la puissance est en C.

Or est-il que, par la proposition de M. Galilée que nous avons rapportée cy-dessus sous la lettre B, la résistance absoluë, qui est la mesme aux Prismes FD & CD, est au moment de la résistance du Prisme CD, comme la ligne CD est à CG demidiamétre de la base; & le moment de la résistance du Prisme CD, est au moment du Prisme ou Cylindre FD, comme la ligne CG est à la ligne CP, (le moment de CD égal au poids K, estant la moitié du moment de FD qui est égal aux deux poids K & L, comme CG demidiamétre de la base est la moitié du diamétre CP:) Donc, par égalité, la résistance absoluë sera au moment de la résistance du Prisme FD soûtenu en C, comme la ligne CD est au diamétre CP. Ce qu'il faut remarquer.

Fig. 3. Tab. 20. Voyons à present ce qui arrive aux Prismes de mesme longueur & largeur, & qui ne différent qu'en leur hauteur: C'est à dire, pour me servir de vos termes, dans lesquels il se fait diminution que d'une seule dimension: Comme ABFE & ABQL, dont les longueur AB & largeur PI ou NO sont égales, mais les hauteurs CP & CN sont inégales: Je dis que le moment de la résistance du Prisme AE dans son milieu C, est au moment du Prisme AL dans le mesme point C, en mesme raison que le quarré de la ligne CP est au quarré de la ligne CN. Car la raison du moment de la résistance en C du Prisme AE, au moment de la résistance en C du Prisme AL, est composée des raisons du moment en C du Prisme AE à sa résistance absoluë, de la résistance absoluë du Prisme AE à la résistance absoluë du Prisme AL,

AL, & de la résistance absoluë du Prisme AL au moment de sa résistance en C: Mais il vient d'estre enseigné cy-dessus, que le moment de la résistance en C du Prisme AE est à sa résistance absoluë, comme le diamétre CP est au costé CB; & la résistance absoluë du Prisme AE, par ce qui a esté cy-dessus rapporté de M. Galilée sous la lettre C, à la résistance absoluë du Prisme AL, comme la surface CI est à CO, c'est à dire, comme la ligne CP est à CN; & la résistance absoluë du Prisme AL est au moment de sa résistance en C, comme le costé CB est au diamétre de la base CN. Donc la raison du moment de la résistance en C du Prisme AE, au moment en C du Prisme AL, sera composée des raisons du diamétre CP au costé CB, de la ligne CP à la ligne CN, & du costé CB au diamétre CN: Mais les raisóns de CP à CB & CB à CN sont égales à la raison de CP à CN. Donc la raison du moment AE en C au moment de AL en C, sera composée des raisons de la ligne CP à CN & CP à CN, c'est à dire, comme le quarré de CP au quarré de CN.

Je dis bien davantage; que si l'on prend quelqu'autre point que ce puisse estre comme H, le moment de la résistance du Prisme AE au point H, sera encore au moment de la résistance du Prisme AL au mesme point H, comme le quarré de HM ou CP au quarré de HK ou CN. Car la raison du moment de la résistance du Prisme AE au point H, au moment de la résistance du Prisme AL au mesme point, est composée des raisons du moment de AE en H, au moment du mesme AE en son milieu C; du moment du Prisme AE en C, au moment du Prisme AL au mesme point C; & du moment du Prisme AL en C, au moment du mesme Prisme AL au point H. Mais le moment de la résistance du Prisme AE au point H, est au moment du mesme Prisme AE en C, comme le rectangle ACB est au rectangle AHB; le moment de la résistance du Prisme AE en C, est au moment du Prisme AL en C, comme le quarré du diamé-

 tre

tre PC; est au quarré du diamétre CN; & le moment de la résistance du Prisme AL, en C, est à son moment en H, comme le rectangle AHB au rectangle ACB. Donc la raison du moment de la résistance du Prisme AE en H, au moment de la résistance du Prisme AL au mesme point H, sera composée des raisons du rectangle ACB au rectangle AHB, du quarré PC au quarré CN, & du rectangle AHB au rectangle ACB. Mais la raison de ACB à AHB détruit celle de AHB à ACB. Il ne reste donc plus que la raison du quarré PC au quarré CN ou du quarré HM au quarré HK, à laquelle soit égale la raison du moment de la résistance du Prisme AE au point H, au moment de la résistance du Prisme AL au mesme point H.

Fig. 3. *Tab.* 20. Maintenant, si l'on étend un Solide, quel qu'il puisse estre, comme l'un de ceux que nous avons consideré AKPBRIS, qui soit inscrit dans la Poutre AE, en sorte qu'il soit de mesme longueur & largeur qu'elle, & qu'il passe par le point K, par où il faut s'imaginer une autre Poutre AL; il paroist par les choses démontrées cy-dessus, que le moment de la résistance de ce Solide inscrit au point H, est le mesme que le moment de la Poutre AL au mesme point; lequel estant au moment de la Poutre AE au point H, en la raison du quarré de HK au quarré de HM; il s'ensuit que le moment de ce Solide inscrit en H, est au moment de la Poutre AE au mesme point, comme le quarré de HK à HM ou de CP à CN, & non pas en mesme raison que les lignes CP & CN, comme vous l'avez marqué. Et que je n'ay point fait de Paralogisme, quand sur cette proposition j'ay conclu que les momens des Solides Paraboliques, en quelque maniére qu'ils soient inscrits dans la Poutre selon sa hauteur, ne sont point égaux entre eux; & que ceux du Demicercle & de l'Ellipse le sont en tous leurs points.

Fig. 1. *Tab.* 21. Je dis des Solides Paraboliques inscrits dans la Poutre selon sa hauteur, parce que la mesme Poutre peut estre coupée par une ligne Parabolique selon sa largeur, en sorte qu'estant soûtenuë par

les

les deux bouts, les momens de la réſiſtance ſoient égaux en toutes ſes parties. Comme ſi la Poutre AE eſt coupée ſur ſa largeur GE par une Parabole GIF, dont l'axe ſoit la meſme largeur PI, le ſommet I & l'amplitude toute la longueur de la Poutre GF, & qui faſſe, dans la Poutre, le Solide Parabolique GIFBOA de meſme hauteur & longueur qu'elle.

Je dis que les momens de la réſiſtance de ce Solide Parabolique ſoûtenu ſur ſes extrêmes A & B, ſont par tout égaux; c'eſt à dire, que ſi ce Solide eſt rompu par une puiſſance ou un poids, agiſſant au point M ou H, il ſera rompu par la meſme puiſſance ou le meſme poids, qui fera effort au point P ou C; & ainſi des autres.

Parce que le moment au point H du Solide Parabolique, eſt à ſon moment au point C, en raiſon compoſée de la raiſon du moment du Parabolique en H, au moment de la Poutre AC au meſme point H; de la raiſon du moment de la Poutre en H, à ſon moment en C; & de la raiſon du moment de la Poutre en C, au moment du Parabolique au meſme point C: Mais la raiſon du moment de la réſiſtanec du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre AE au meſme point H, eſt la meſme que celle des parties du Solide, qui ſe doivent ſéparer dans la ſurface HN, aux parties contenuës dans la ſurface de la Poutre HK; c'eſt à dire, comme la meſme ſurface HN, eſt à la meſme ſurface HK, ou comme la ligne MN à MK ou PI (à cauſe que les ſurfaces HN & HK ont une meſme hauteur HM:) Et la raiſon du moment de la Poutre en H, à ſon moment en C, eſt la meſme que celle du rectangle ACB au rectangle AHB; & la raiſon du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au meſme point C, eſt celle d'égalité; puiſque c'eſt le meſme moment en l'un & en l'autre, par ce qui a eſte dit cydeſſus. Et partant le moment de la réſiſtance du Solide Parabolique en H, au moment du meſme Solide au point C, ſera en raiſon compoſée des raiſons de la ligne MN à la ligne PI, &

 du

du rectangle ACB au rectangle AHB. Mais par la propriété de la Parabole la ligne MN est à la ligne PI, comme le rectangle AHB est au rectangle ACB: Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, sera au moment de la résistance du mesme Solide au point C, en raison composée de celles du rectangle AHB au rectangle ACB, & du rectangle ACB au rectangle AHB, c'est à dire, en raison d'égalité. Et la mesme chose pouvant estre concluë de la mesme maniére en tous les points de la base AB, il s'ensuit que les momens du Solide Parabolique sont égaux, en quelque point que la puissance ou le poids agissent.

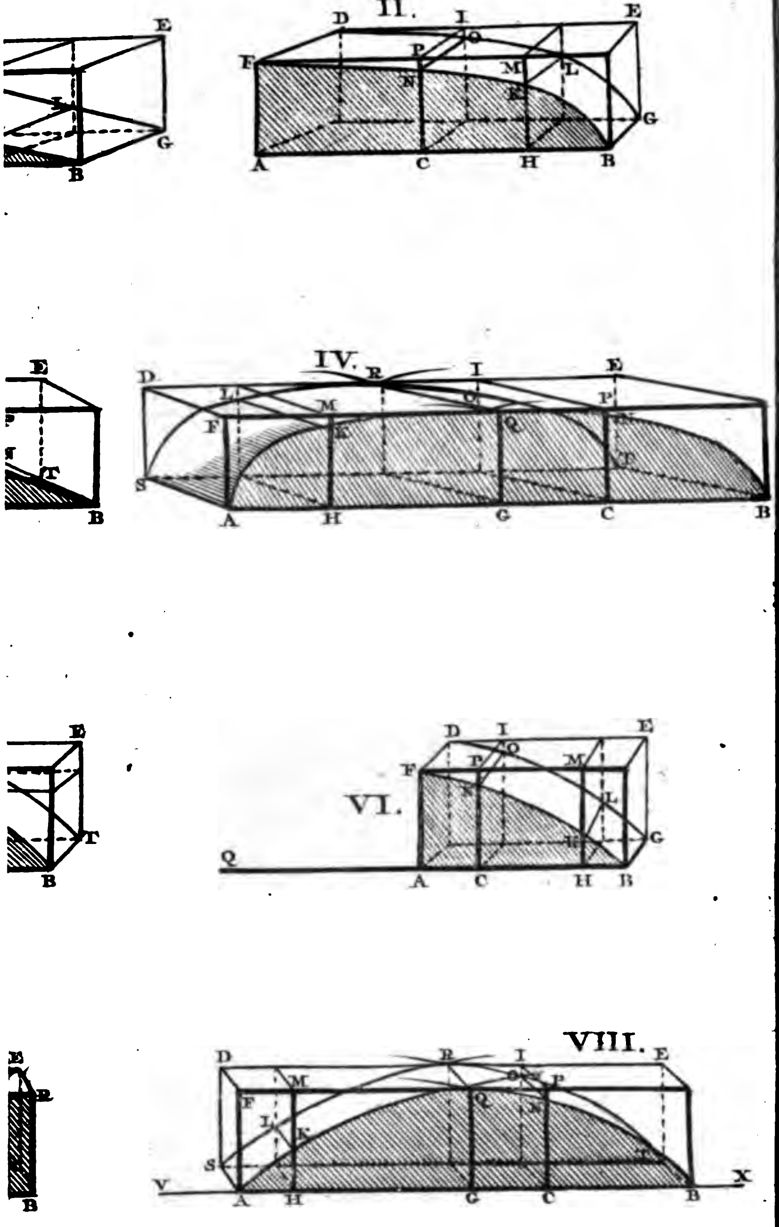
La mesme chose se peut encore démontrer d'un autre Solide Parabolique double CRXQDPSO, qui sera fait dans la Poutre AE, si sa largeur GE est coupée par les deux Paraboles opposées en dedans DPS & DOS, dont les sommets sont aux points P & O, l'axe PO commun, aussi-bien que l'amplitude DS; parce qu'en ce cas, & supposé que ce Solide soit soûtenu par ses extrêmes Q & R: Je dis que les momens de sa résistance sont par tout égaux.

Fig. 2. *Tab.* 21.

Car si l'on entend que la puissance agisse au point K ou H, & puis au point N ou C; le moment de la résistance du double Parabolique en H, sera à son moment en C, en raison composée du moment du Parabolique en H, au moment du Prisme AE au mesme point H ou I; du moment du Prisme en I, à son moment en C; & du moment du Prisme en C, au moment du Parabolique au mesme point C. Mais la raison du moment du Solide Parabolique au point H, au moment de la Poutre AE au mesme point H ou I, est la mesme que celle de la surface HL à la surface IM, c'est à dire, (à cause de la commune hauteur FH.) de la ligne HT ou FL à la ligne ZM ou PO; & la raison du moment de la Poutre AE en I à son moment en C, est la mesme que celle du rectangle ACB au rectangle AIB, c'est à dire, du rectangle DNS au rectangle DKS; & enfin la raison

du

TAB. XVII.



Blondel.

du moment de la Poutre en C, au moment du Solide Parabolique au mesme point C, est la raison d'égalité: Et partant la raison du moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, au moment du mesme Solide au point C, sera composée des raisons de la ligne FL à la ligne PO, ou, prenant les moitiez, de la ligne FK à la ligne PN, & du rectangle DNS au rectangle DKS: Mais par la propriété de la Parabole, la ligne FK est à la ligne PN, comme le rectangle DKS est au rectangle DNS: Donc le moment de la résistance du Solide Parabolique au point H, à son moment au point C, sera en raison composée des raisons du rectangle DKS au rectangle DNS, & du rectangle DNS au rectangle DKS, c'est à dire, en raison d'égalité. Ce qui se pouvant dire en la mesme maniére de tous les points de la base du Solide Parabolique, on peut conclure que les momens de la résistance sont par tout égaux.

J'ay esté bienaise de vous rapporter les propriétez de ces Solides Paraboliques, afin de vous avertir en mesme temps, que cette égalité de momens de leurs résistances, ne fait rien du tout au Théoréme de M. Galilée, qui est toûjours faux en la maniére qu'il l'a proposé, n'ayant jamais, en toutes ses figures & en tous ses raisonnemens, consideré les sections ou coupes des Prismes ou Poutres en autre maniére que selon leur hauteur, & jamais selon leur largeur.

Et pour vous oster le scrupule qui vous peut rester sur cette matiére, en sorte que vous ne puissiez plus douter, comme vous faites, qu'un si grand Homme ait pû se méconter; je veux vous faire voir encore quelques exemples, que j'ay tirez de ses mesmes Dialogues méchaniques, qui me font peine, & que je souhaiterois avoir esté plus clairement expliquez par leur Auteur.

Le premier est celuy dont je vous ay dit un mot cy-dessus au texte cotté C, qui fait la 4. Prop. du 2. Dial. des Mech. où il dit, qu'aux Cylindres ou Prismes de mesme longueur, & de différentes grosseurs, les momens de la résistance croissent en raison triplée des diamétres de leurs bases; c'est à dire, que le moment

Fig. 4. de la résistance du Cylindre B, est au moment de la résistance du
Tab. 20. Cylindre A, comme le Cube de la ligne EF, est au Cube de la ligne CD.

Ce qui ne peut pas estre veritable, s'il ne fait abstraction du poids des Cylindres A & B, dont il ne parle pourtant point du tout; au contraire, par la liaison de cette Proposition avec la précedente, il semble que les momens de la résistance doivent estre considerez, dans cette Proposition, comme les momens du poids ou de la puissance sont considerez dans la 3ᵉ Prop. qu'il conclut en ces termes: *Concludasi per tanto, i momenti delle forze de i Prismi e Cilindri egualemente grossi, mà disegualmente lunghi esser trà di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè esser come i quadrati delle lunghezze.*

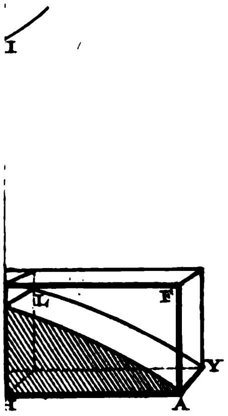
Monstreremo adesso nel segondo luogo, segondo qual proporzione cresca la resistenza all' esser spezzati ne i Prismi è Cilindri, mentre restino della medesima lunghezza, è si accresca la grossezza. E' qui dico che (Prop. 4.) *Ne i Prismi è Cilindri egualmente lunghi, ma disegualmente grossi, la resistenza all' esser rotti cresce in triplicata proporzione de i diametri delle lor grossezza, cioè delle lor basi.*

Ce qui fait voir que les momens du poids, ou de la puissance, ayant esté considerez, dans la 3ᵉ Prop., relativement au moment de leur résistance; les momens de la résistance doivent, par la mesme raison, estre considerez, dans la 4ᵉ Prop., avec relation aux momens des puissances.

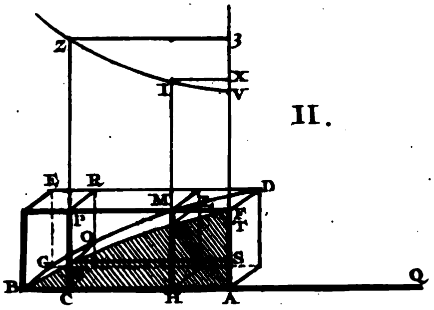
Auquel cas, comme les momens des puissances, dans la 3ᵉ Prop., sont en raison doublée des costez des Cylindres, à cause que le moment de la résistance est le mesme en l'un & en l'autre; il faudroit de mesme, dans la 4ᵉ Prop., que les momens des poids des Cylindres de mesme longueur & de différente grosseur, fussent toûjours égaux, pour conclure que les momens de leurs résistances, sont comme les Cubes des diamétres de leurs bases.

Mais comme les momens des poids de ces Cylindres ne sont point égaux, aussi les momens des résistances ne croissent pas, sur cette

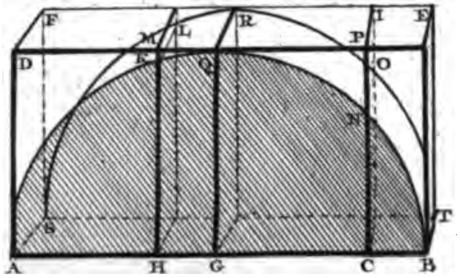
TAB. XVIII.



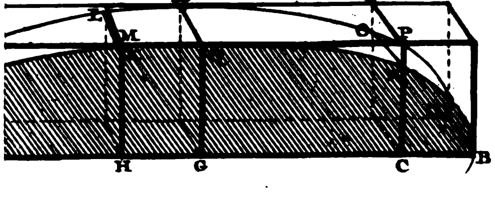
II.



IV.



V.



Blondel.

te hypothése, en la mesme raison que les Cubes des diamétres de leurs bases, mais seulement en celle des mesmes diamétres. Ce que je démontre en cette maniére, aprés avoir coupé les lignes DG & FH en deux également en K & L, aussi-bien que les deux CD & EF en M & I, & fait FN égale à DM. *Fig 4. Tab. 20.*

La résistance absoluë du Cylindre A, est à la resistance absoluë du Cylindre B, comme la base CD est à la base EF: Et parce que les Cylindres sont de mesme longueur, ils seront aussi comme leurs bases, aussi-bien que leur poids; & partant le poids du Cylindre A, sera au poids du Cylindre B, comme la résistance absoluë du Cylindre A, est à la résistance absoluë du Cylindre B. Maintenant, comme le centre de l'action de la résistance absoluë du Cylindre A, fiché dans le mur à angles droits, est au centre de la base M; & le centre de l'action du poids du mesme Cylindre A est au point K, en sorte que la résistance absoluë résiste par la ligne DM, & le poids agit par la ligne DK: Si nous supposons que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B soit au point N, comme le centre de l'action du poids du mesme Cylindre est au point L, en sorte que la résistance absoluë du Cylindre B résiste par la ligne FN, égale à la ligne DM, ainsi que le poids du mesme Cylindre B agit par la ligne FL, égale à la ligne DK, il n'y aura, dans cette supposition, aucun changement aux raisons des poids ni des résistances; & le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en N, comme le moment du poids A en K, est au moment du poids B en L; & en permutant, la raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment du poids du mesme Cylindre A en K, sera égale à la raison du moment de la résistance du Cylindre B en N, au moment du poids du mesme Cylindre B en L. Mais parce que le centre de l'action de la résistance du Cylindre B est au point I, centre de la base EF; & le moment de la résistance au point I, est au moment de la résistance au point N, comme la ligne FI à la linge FN, c'est à dire, DM; ou prenant leurs

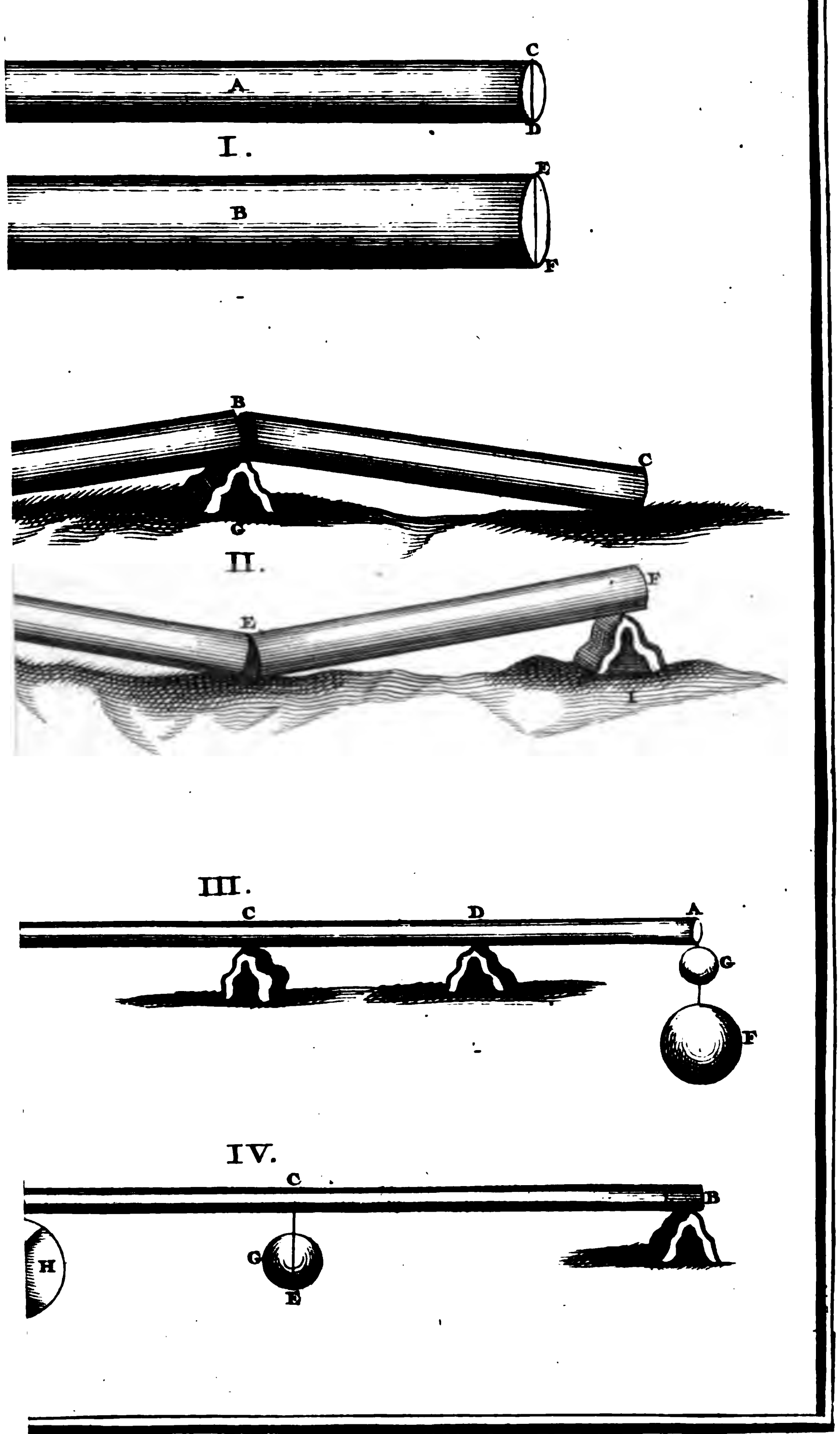
leurs doubles, comme le diamétre EF est au diamétre CD; il s'ensuit que le moment de la résistance du Cylindre B en I, au regard du moment du poids B en L, est plus grand que le moment de la résistance du mesme Cylindre B en N, au regard du mesme poids B en L; c'est à dire, (en prenant des raisons égales) plus grand que le moment de la résistance du Cylindre A en M, au regard du poids A en K; en la mesme raison que le diamétre EF est plus grands que le diamétre CD: & par conséquent que le moment de la résistance du Cylindre B au regard de son poids, s'est accrû sur le moment de la résistance du Cylindre A au regard de son propre poids, en la raison de l'accroissement du diamétre de la base EF sur le diametre de la base CD, & non pas en la raison des Cubes de ses diamétres. Ce qu'il falloit démontrer.

La mesme proposition se peut démontrer encore d'une autre maniére, aprés avoir fait que comme le diamétre CD est au diamétre EF, ainsi FL soit à FO.

La raison du moment de la résistance du Cylindre A en M, au moment de la résistance du Cylindre B en I, est composée de la raison de la base CD à la base EF, & de celle du demidiamétre DM au demidiamétre FI, ou de la ligne CD à la ligne EF. Et la raison du moment du poids du Cylindre A en K, au moment du poids B en O, est composée des mesmes raisons, sçavoir de celle du poids A au poids B, qui est égale à celle de la base CD à la base EF; & de celle de la ligne DK ou FL à la ligne FO, qui par la construction est la mesme que celle de CD à EF: Donc le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I, comme le moment du poids du Cylindre A en K, est au moment du poids du Cylindre B en O: Et en permutant, le moment de la résistance du Cylindre A en M, sera au moment du poids A en K, comme le moment de la résistance du Cylindre B en I, est au moment du poids B en O.

Maintenant, par ce qui a esté démontré par d'autres, que si deux raisons ont un mesme antécédent, elles seront entre elles com-

TAB. XIX.



Blondel.

comme reciproquement les termes conséquens; il s'ensuit que la raison du moment de la résistance du Cylindre B en I au moment du poids B en L, & la raison du mesme moment de la résistance du Cylindre B en I au moment du mesme poids B en O, ayans un mesme antécédent, sçavoir le moment de la résistance du Cylindre B en I; elles seront entre elles comme réciproquement les termes conséquens, c'est à dire, que le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la mesme résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O, comme le moment du poids B en O, est au moment du mesme poids B en L, c'est à dire, comme la ligne BO est à la ligne BL, ou comme le diamétre EF au diamétre CD; & partant que le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du mesme poids B en O, comme la ligne EF est à la ligne CD. Mais il a esté montré cy-dessus, que le moment de la résistance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, estoit égal au moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en O. Donc le moment de la résistance du Cylindre B en I au regard du moment du poids B en L, sera au moment de la résistance du Cylindre A en M au regard du moment du poids A en K, comme le diamétre EF est au diamétre CD. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reste, la verité du Corollaire qui suit la 4. Prop. & qui dit, que les résistances sont en raison sesquialtere des poids des Cylindres, n'en paroist pas moins, dans cette hypothése de l'accroissement des résistances en raison des diamétres des bases des Cylindres par relation aux poids, que dans l'autre, où les résistances s'augmentent en raison des Cubes des mesmes diamétres; si l'on se souvient que les résistances absoluës & les poids croissent l'un & l'autre en raison doublée des diamétres, & que les distances de l'action des poids, estant les mesmes à cause de la mesme longueur

 des

des Cylindres, le moment des poids ne s'augmente point: Mais les distances de l'action des résistances s'augmentant en raison des diamétres, à cause de la différence des grosseurs; il s'ensuit qu'ajoûtant cette raison des diametres à celle des résistances absoluës, c'est à dire, à celle des quarrez des mesmes diamétres, il se fera la raison triplée des diamétres pour celle des momens des résistances, qui par conséquent est sesquialtere de celle des momens des poids; qui est demeurée doublée des mesmes diamétres.

Ce que nous venons de dire de la 4. Prop. se peut encore assûrer de la 5. du mesme Livre, laquelle dit, que *I Cilindri è Prismi di diversa lunghezza, è grossezza hanno le lor resistenze all' esser rotti di proporzione composta della proporzione de i Cubi de i diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatament prese*; & qui ne peut estre véritable, si l'on ne fait encore abstraction du propre poids des Cylindres, dont M. Galilée ne parle pourtant point du tout, non plus qu'aux précedentes, ny en celles qui suivent. Puisque si l'on considére les momens de la résistance des Cylindres de différentes longueurs & grosseurs rélativement aux momens de leurs propres poids, elles ne seront pas, comme il dit, en raison composée de la proportion des Cubes des diamétres de leurs bases, & de celle de leurs costez pris réciproquement; mais bien en raison composée de la proportion des diamétres des bases, & de celle des quarrez des costez des Cylindres pris réciproquement. Ce que je démontre en cette maniére, & sur la fig. de M. Galilée, qui fait la ligne EG égale à BC.

Fig. 5. *Tab.* 20. La raison du moment de la résistance du Cylindre AC au regard du moment du poids du mesme Cylindre AC, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du mesme Cylindre DF, est composée de la raison du moment de la résistance de AC au regard du moment du poids du mesme AC, au moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids DG, & de la raison du moment de la résistance DG au regard du moment du poids DG, au moment de la re-

résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids DF. Mais la raison du moment de la résistance de AC au regard du moment du poids de AC, au moment de la résistance de DG au regard du moment du poids DG, est la mesme que la raison du diamétre AB au diamétre DE, par ce qui a esté démontré cy-dessus; & la raison du moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids de DG, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids DF, est la mesme que celle du quarré du costé EF au quarré du costé EG ou BC, ainsi que je le démontreray cy-dessous. Et partant, la raison du moment de la résistance du Cylindre AC au regard du moment du poids AC, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids DF, sera composée des raisons du diamétre AB au diamétre DE, & du quarré du costé EF au quarré du costé BC. Ce qu'il falloit démontrer.

Or pour faire voir que la raison du moment de la résistance du Cylindre DG au regard du moment du poids du mesme DG, au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du mesme DF, est égale à celle du quarré EF au quarré EG; je dis ainsi. Les raisons des momens de la résistance des deux Cylindres DG & DF aux momens de leurs poids, ayant un mesme antécédent, sçavoir le moment de la résistance, qui est le mesme en tous les Cylindres de mesme grosseur; elles seront entre elles comme les termes conséquens pris réciproquement, (par ce qui a esté demontré par d'autres.) C'est à dire, que la raison du moment de la résistance du Cylindre DG au moment du poids du mesme DG, sera à la raison du moment de la résistance du Cylindre DF au moment du poids du mesme DF, comme réciproquement le moment du poids du Cylindre DF, est au moment du poids du Cylindre DG. Mais par la 2e Prop. de M. Galilée, le moment du poids de DF, est au moment du poids de DG, comme le quarré du costé EF, est au quarré du costé EG: Donc le moment de la résistance du Cylindre DG au re-

 gard

gard du moment du poids du mesme DG, sera au moment de la résistance du Cylindre DF au regard du moment du poids du mesme DF, comme le quarré du costé EF, au quarré du costé EG ou BC.

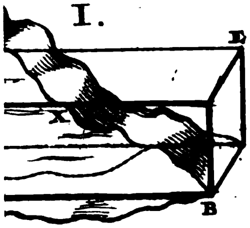
Il y a encore une maniére de raisonner, qui fait peine, dans son 3. Dial. où, aprés avoir fort bien dit, *Motum æqualiter seu uniformiter acceleratum dico illum; qui à quiete recedens, temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.* Il fait un discours excellent pour l'explication de cette définition, contre laquelle ensuite il se fait faire une objection, qu'il résout en cette sorte.

Sagr. *Per quanto per ora mi si rappresenta all' intelletto, mi pare che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire senza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato esser quello nel quale la velocità andasse crescendo segondo che cresce lo spazio che si và passando: si che per essempio il grado di volocità acquistato dal mobile nella scesa di quattro braccia, fusse doppio di quello che'gli hebbe, sceso che fù lo spazio di due, è questo doppio del conseguito nello spazio del primo bracio. Perche non mi par che sia dà dubitare, che quel grave, che viene dall' altezza di sei braccia, non habbia, è perquota con impeto doppio di quello che hebbe, sceso che fù trè braccia, è triplo di quello che hebbe alle due, è sescuplo dell'havuto nello spazio di uno.* Salu. *Io mi consolo assai d'haver havuto un tanto compagno nell' errore; è più vi dirò, che il vostro discorso hà tanto del verisimile, è del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi niegò, quando glielo proposi, d'esser egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. Mà quello, di che io poi sommamente mi maravigliai, fù il vedere scoprir con quattro semplicissime parole, non pur false, mà impossibili due proposizioni, che hanno del verisimile tanto, che havendole io proposte à molti, non hò trovato, chi liberamente non me l'ammetesse.* Simpl. *Veramente io sarei del numero de i conceditori; è che il grave descendente,* Vires acquirat eundo, *crescendo la velocità à ragion dello spazio, è chel momento dell' istesso percuziente sia doppio venendo da doppia altezza, mi paiono*

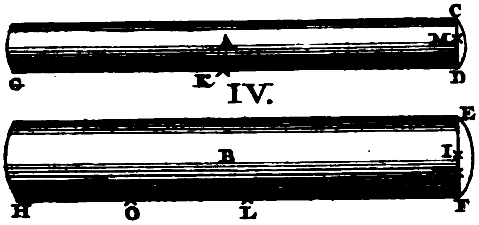
pro-

TAB. XX.

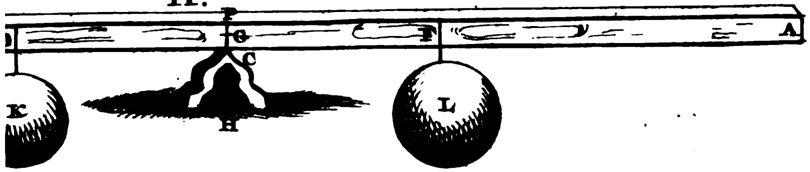
I.



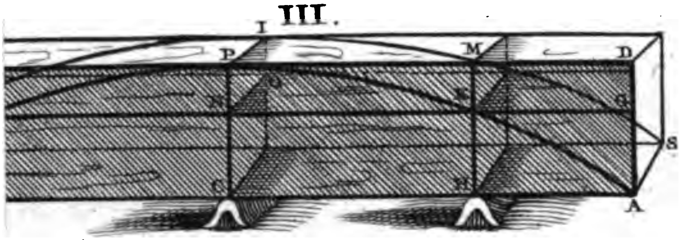
IV.



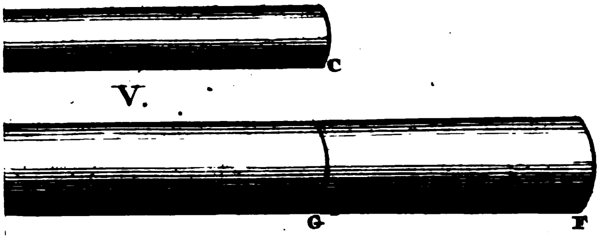
II.



III.



V.



Blondel.

proposizioni da concedersi senza repugnanza, ò controversia. Salu. *E pur son tanto false e impossibili, quanto che il moto si faccia in un instante. Et eccòvene chiarissima dimonstrazione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione, che gli spazii passati ò da passarsi, tali spazii vengon passati in tempi eguali; se dunque le velocità, con le quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furono doppie delle velocità, con le quali passò le due prime braccia (si come lo spazio è doppio dello spazio) adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; mà passare il medesimo mobile le quattro braccia, e le due nell' istesso tempo, non può haver luogo fuor che nel moto instantaneo. Mà noi veggiamo, che il grave cadente fà suo moto in tempo, & in minore passa le due braccia, che le quattro. Adunque è falso, che la velocità sua cresca come lo spazio. L'altra proposizione si dimostra falsa con la medesima chiarezza,* &c. Sagr. *Troppa evidenza, Troppa agevolezza è questa, con la quale manifestate conclusioni ascoste; Questa somma facilità,* &c.

Qui fait paroistre que la solution de cette objection luy plaist extraordinairement; & il en fait tant de cas, qu'il ne peut quasi se lasser d'en exagérer la beauté.

Et cependant je vous avouë franchement la foiblesse de mon esprit, qui ne l'a pû jusqu'icy comprendre en aucune maniére, quelque soin que j'aye pris de méditer sur son raisonnement, lequel au contraire m'a toûjours paru faux, & paralogistique en sa forme, quoy qu'il soit très-véritable en sa matiére.

Et pour vous faire voir mon sentiment, je vous diray que pour avoir démontré, dans la 2e Prop. du mesme Dial. au commencement, lors qu'il a expliqué les propriétez du mouvement égal & uniforme, que *si spatia sint ut velocitates, tempora erunt æqualia*; Je ne voy pas pour cela, que parlant des propriétez du mouvement acceleré, (permetez-moy de me servir de ce terme) il ait pû dire, que *quando le velocità hanno la medesima proporzione che gli spazii passati, ò da passarsi, tali spazii vengon passati in tempi eguali.* Ce qui peut estre absolument nié, puisque ces mouvemens sont si differens, qu'il n'y a aucune connexité entre ces

 deux

deux Propositions, & ce qui convient à l'un, peut absolument ne pas convenir à l'autre. Et cependant c'est de cette Majeure, que M. Galilée tire ces conséquences qui ravissent M. Sagredo, & qui font qu'il s'écrie avec tant d'emportement, *Troppa Evidenza*, *troppa agevolezza*, &c.

Que si l'on veut dire qu'il a pû argumenter sur les proprietez du mouvement acceleré, comme il a fait sur celles du mouvement égal & uniforme, par ce qu'il démontre un peu au dessous dans la 1. Prop. de l'acceleré, que *Tempus in quo aliquod spatium à mobili conficitur latione ex quiete uniformiter acceleratâ, est æquale tempori, in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu æquabili delato, cujus velocitatis gradus subduplus sit, ad summum ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.* Qui fait voir la relation qu'il y a entre les deux mouvemens; & que pour ce qui regarde les temps & les espaces, ce qui se dit de l'un, peut estre proportionellement entendu de l'autre.

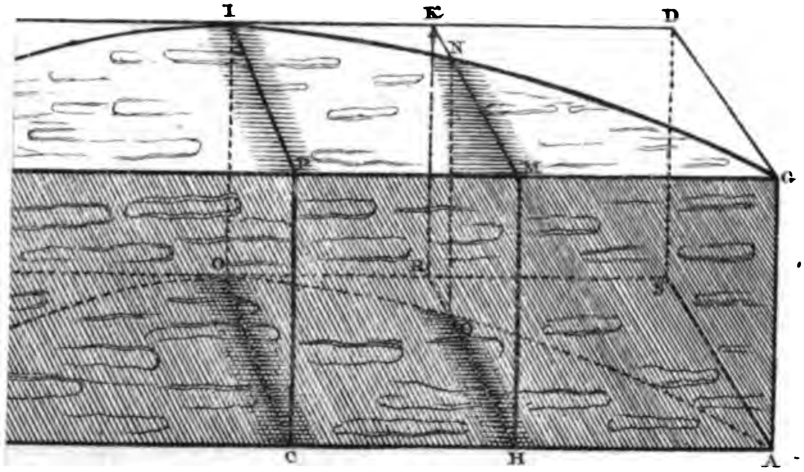
Je répondray que ce discours, quelque véritable qu'il soit en soy-mesme, ou, comme on dit dans les Ecoles, par sa matiére, il est toûjours faux dans sa forme; & le Paralogisme ne fait que changer de nom, en ce que cy-dessus on pouvoit l'appeller, comme on dit en Logique, *à non causâ tanquam à causâ*, & icy *à petitione Principii.* Puisque cette premiére proposition du mouvement acceleré, supposant & estant fondée sur la définition contestée, il n'est pas juste de vouloir démontrer celle-cy par l'autre.

Voilà donc les Observations que j'ay faites sur ces matiéres, que je ne vous rapporte point avec un esprit de Critique, ou d'un homme qui ne cherche que ce qui peut estre repris dans les plus beaux Ouvrages, puis qu'il n'y a peut-estre personne au monde, qui ait plus d'amour & d'estime pour tout ce qui vient de M. Galilée que moy, qui ay eû l'honneur d'estre de ses derniers Disciples, & qui ay travaillé depuis tant d'années a estendre cette Doctrine de la résistance des Solides dont il est l'Inventeur, & qu'il a renfermée dans un si petit nombre de propositions; ayant pour ce su-

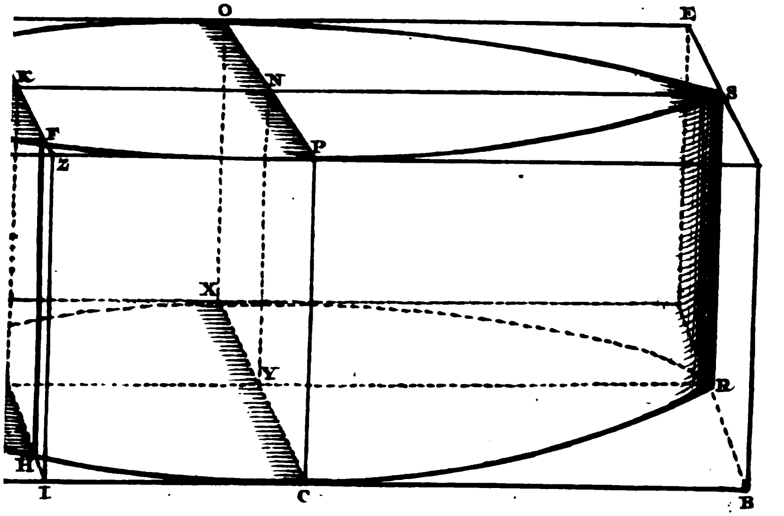
jet

TAB. XXI.

I.



II.



Blondel.

jet composé le Livre que vous avez veû prest à estre donné au public il y a plus de douze ans, que j'appelle *Galilæus Promotus de resistentiâ Solidorum*; & qui pouvant quelque jour estre mis en lumiére, fera assez connoistre ma reconnoissance, & le respect que je porte à la memoire de ce grand Homme, que nostre bon Amy M. Gassendi appelloit ordinairement le Platon de nostre siécle.

Ce n'est donc pas dans le dessein de rien censurer dans ses Ecrits que je vous ay marqué mes sentimens; mais seulement pour vous faire voir que ce n'est pas miracle, que dans le nombre infini de méditations toutes divines, dont il a remply ses Ouvrages, quelques petites bagatelles comme celles-cy, luy soient échappées sans y avoir pris garde.

Ce qui est, à mon avis, tout ce que je devois vous dire, pour vous tirer des doutes qui vous estoient venus sur la lecture de mon écrit: Et si dans tout ce discours vous trouvez encore quelque chose qui ne vous satisfasse pas entiérement, il faudra que nous nous en entretenions plus particuliérement ensemble; & que sur le Livre mesme de M. Galilée j'essaie de me mieux expliquer que je n'ay pû faire dans les raisonnemens que je vous ay communiquez, où j'ay eû le malheur de ne me sçavoir pas si nettement faire entendre.

Et c'est une des principales raisons qui m'ont fait estendre un peu plus au long dans cette Lettre, & rapporter quantité de passages aux mesmes termes de M. Galilée; puisque dans cette question il seroit toûjours fâcheux de tomber dans l'inconvenient, où une autre de pareille nature a jetté dans ces derniers temps les plus beaux esprits de l'Europe. Et d'autant plus, qu'en cette matiére il n'y a point de Formulaire à signer, & que l'on peut impunément douter du veritable sentiment de M. Galilée, sans courir aucun danger d'estre soupçonné de Jansenisme, ou d'avoir mauvaise opinion de l'infaillibilité du Saint Siége. Adieu, Monsieur; conservez-moy toûjours l'honneur de vos bonnes graces.
A Paris ce 18. Juillet 1661.

FIN.

METHODE

POUR TROUVER

LA SOLUTION

DES PROBLEMES

PAR LES EXCLUSIONS.

Par M. DE FRENICLE.

METHODE
POUR TROUVER LA SOLUTION DES PROBLEMES PAR LES EXCLUSIONS.

Quoi-que les questions doivent estre examinées diversement suivant la diversité de leur sujet, on peut néanmoins y observer quelque regles qui conviennent à toutes en général, & qui peuvent en faciliter la recherche.

On doit toûjours connoistre quelque propriété de ce qui est requis dans la question; car sans cela il seroit impossible de rien trouver, si ce n'est que le probléme, ou la question proposée, se donne à connoistre par elle-mesme. Comme si l'on demandoit quelque chose touchant les nombres qui sont la somme de deux quarrez, ou des costez d'un triangle: pourvu qu'on sçache le moyen de faire des quarrez & des triangles, il sera facile de sçavoir leur somme, sans qu'il soit besoin d'avoir aucune autre propriété desdites sommes. De sorte qu'il suffit de connoistre ce qui est proposé, ou par soy-mesme comme les sommes susdites, ou par quelque propriété. Comme si l'on demandoit quelque particularité touchant les hypotenuses des triangles rectangles dont les costez sont des nombres entiers:

 car

car pour y parvenir il ſera néceſſaire d'avoir quelque propriété deſdites hypotenuſes par le moyen deſquelles on les puiſſe avoir toutes.

Que ſi l'on connoiſt pluſieurs propriétez de la choſe propoſée, on ſe ſervira de celle qui conduit plus facilement à la queſtion, & par de moindres nombres. Car il faut remarquer que le principal but & ſubtilité de cette methode, conſiſte principalement à racourcir le chemin, & à choiſir de certains détours qui en oſtent la longueur & les plus grandes difficultez.

Mais parce qu'ordinairement chaque queſtion ſe traite diverſement ſuivant les différentés proprietez dont il ſe faut ſervir, il ſeroit impoſſible de donner des regles pour tous les divers cas qu'on pourroit rencontrer. C'eſt pourquoy l'on a jugé plus à propos de donner des exemples qui ſeront plus utiles pour faire entendre cette méthode, aprés avoir expliqué quelques regles générales qu'on peut obſerver pour parvenir à la ſolution du problême.

1°. Si l'on connoiſt en général ce qui eſt propoſé, mais non pas le particulier qu'on propoſe, il faut par le moyen de pluſieurs particuliers connus, trouver quelque regle qui convienne à tous, & par ſon moyen on trouvera ce qui eſt requis.

Par exemple, ſi l'on demande quels ſont les quarrez dont la ſomme eſt l'hypotenuſe du triangle 57, 176, 185.

Puiſqu'on ſçait en général le moyen de faire des triangles, il en faut conſtruire pluſieurs dont on ſçaura les quarrez, comme le triangle 3, 4, 5, qui a 4 & 1 pour ſes quarrez; 5, 12, 13. qui a 9 & 4; 8, 15, 17, qui a 16 & 1: ou bien meſme on ſe contentera au commencement de quelqu'un de ces triangles, & puis l'on cherchera quelque voye par laquelle avec 3, 4, 5, par exemple on puiſſe trouver 4 & 1, & l'ayant trouvée, l'on regardera ſi elle convient aux autres triangles, & par ce moyen l'on trouvera ce qui eſt requis.

Ainſi ayant trouvé que prenant la ſomme & la différence des deux coſtez impairs 5 & 3, qui ſont 8 & 2, leur moitié, 4 & 1 donne les quarrez requis, & trouvant que la meſme choſe convient

aux

aux autres triangles 5, 12, 13; 8, 15, 17, &c. j'obſerveray la meſme regle pour le triangle propoſé 57, 176, 185, en prenant la ſomme & la différence des deux coſtez impairs 57 & 185, qui ſont 242 & 128: leur moitié 121 & 64, donnera les quarrez requis.

2°. Mais ſi l'on ne connoiſt point ce qui eſt propoſé, ni en général, ni en particulier, il en faut chercher les proprietez par ce que l'on a de connu. Et pour cét effet il faut conſtruire & faire des nombres ſemblables à celuy qui eſt requis en toutes les façons poſſibles, & ſans en obmettre aucun, en commençant par le plus petit, & continuant tant qu'on en ait quelque nombre conſiderable, comme dix ou douze, ou plus ſelon la nature de la queſtion; car quelque fois trois ou quatre ſuffiront, & dans d'autres rencontres il en faudra pluſieurs avant qu'on ait découvert ce que l'on cherche.

Par éxemple, ſi l'on demandoit combien de fois quelque nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, je ſuppoſe que je n'aye rien de donné, ſinon le moyen de faire des quarrez, & de les aſſembler deux à deux pour avoir leur ſomme: il faudra voir d'abord ſi les nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, ont quelque propriété particuliere, afin de pouvoir connoiſtre ſi le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, & ſi quelque nombre peut eſtre pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez. Et aprés qu'on aura découvert des nombres qui ſont la ſomme de pluſieurs couples de quarrez, & le moyen d'en trouver autant qu'on voudra, on ſe ſervira de la premiere regle pour en faire leur générale, par laquelle on puiſſe trouver ce qui eſt requis.

Mais pour remarquer quelque propriété deſdits nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, j'aſſemble les quarrez deux à deux, comme 4 & 1; 9 & 1; 9 & 4; 16 & 1; 16 & 4; 16 & 9, &c. tant que j'en aye quelque multitude notable; & conſiderant leurs ſommes 5, 10, 13, 17, 20, 25, &c. je regarde ſi j'y pourray découvrir quelque propriété qui ne convienne point aux autres nombres, comme l'on montrera plus au long dans l'éxemple que l'on donnera dans la ſuite.

 3°.

3°. Pour n'obmettre aucun nombre de ceux qu'on veut avoir, il faut établir quelque ordre pour ne se point égarer dans cette perquisition; & cét ordre doit estre le plus simple & le moins embroüillé qu'il sera possible, & tel que par son moyen l'on puisse poursuivre à faire les nombres aussi avant qu'on voudra sans aucune confusion.

Il faut aussi que cette recherche soit la plus courte & la plus facile qu'il se poura faire, & pour y parvenir on se servira de deux moyens principaux.

La recherche sera courte si l'on considere le moins de nombres que la nature de la question pourra porter.

Elle sera facile si l'on se sert des moindres nombres possibles.

4°. Pour le premier moyen, qui est de faire la perquisition courte, on se servira de *l'Exclusion*. Par l'Exclusion on obmet les nombres que l'on aura reconnus inutiles, & qui ne servent de rien à la question, & dont on se peut tres-bien passer; comme sont presque toûjours les multiples, lesquels neanmoins doivent parfois estre considerez, & principalement en deux cas.

Le premier est, lorsque ne sçachant encore aucune proprieté du nombre requis, on recherche tout ce qui luy appartient tant comme primitif que comme multiple.

L'autre est, quand il arrive qu'il n'y a point de répugnance que ce qui est requis soit fait en partie par des primitifs, & en partie par des multiples tout ensemble: comme lorsqu'on demande trois triangles dont les aires soient les costez d'un triangle rectangle. Dans cet éxemple, à cause que le triangle a trois costez, il n'y a point d'inconvenient que ce dernier triangle ait pour un de ses costez l'aire d'un triangle multiple, & pour les autres, celles de deux autres triangles primitifs; & partant il ne faudra obmettre l'aire d'aucun triangle, tant primitif que multiple.

Il faut remarquer que quand on parle de faire la perquisition courte, ce n'est pas que pour cela on ne recherche plusieurs nombres; mais elle est courte, parce qu'en excluant beaucoup de cho-

choses inutiles, on passe incontinent bien avant & à de grands nombres, par la consideration de tres-peu.

5°. Cette exclusion se fait encore en considerant les lettres finales des nombres: car il arrive souvent que par les finales on voit que plusieurs nombres ne peuvent avoir la qualité qui est requise. Mais pour l'ordinaire on ne se sert de cette pratique que quand on connoist plusieurs propriétez de ce qui est requis, & qu'on en cherche d'autres plus éloignées & plus cachées.

Par exemple, si l'on veut que quelque nombre soit quarré, on considerera les finales que les quarrez peuvent avoir; & ces finales sont 1, 4, 9, avec la lettre précédente paire, & 6 avec la précédente impaire, 25 avec 0, 2, ou 6 auparavant, & enfin 00 précédé d'une finale quarrée: d'où l'on conclura que les nombres qui finiront par 2, 3, 7, ou 8, ne pourront estre quarrez, ou par 5 précédé d'une autre lettre que de 2, ou dont les finales, 1, 4, 9, seront précédées d'un impair, &c. & partant on les pourra exclure comme inutiles à la question.

Il faudra de mesme considerer les finales des autres nombres dont on aura besoin, & voir s'il y en a quelqu'une qui leur soit particulierement affectée: car bien souvent ces finales montrent clairement & démonstrativement, l'impossibilité des questions dont on ne peut donner de solution.

6°. On peut aussi considérer quelques propriétez particulieres de la chose requise, pour faire ladite exclusion: par exemple, si le nombre requis doit estre pairement pair, plus ou moins un, ou bien different de l'unité d'un multiple de 6 ou de 8, ou autres telles propriétez, comme sont les suivantes.

Les quarrez qui ne sont point mesurez par 3, surpassent de l'unité un multiple de 3.

Les quarrez impairs surpassent de l'unité un multiple de 8; & ainsi les quarrez impairs qui ne se mesurent point par 3, surpassent de l'unité un multiple de 24.

Tout quarré qui n'est point mesuré par 5, est different de l'unité d'un multiple de 5.

Tou-

Toute hypotenuſe primitive ſurpaſſe de l'unité un multiple de 4.

La ſomme des deux moindres coſtez de tout triangle primitif, eſt toûjours différente de l'unité d'un multiple de 8.

Tout nombre premier excepté 2 & 3, eſt différent de l'unité d'un multiple de 6.

Ces propriétez & autres eſtant conſiderées à propos, donnent ſouvent tant d'excluſions, principalement aux queſtions impoſſibles, qu'elles ſemblent en montrer clairement l'impoſſibilité.

7°. Le ſecond moyen par lequel la perquiſition ſe rendra facile, eſt en ſe ſervant des moindres nombres qu'on pourra; il ſe peut nommer *diminution*. Il y a pluſieurs voyes pour parvenir à cette diminution, auſſi-bien qu'à l'excluſion, comme ſont les ſuivantes.

En cherchant, ou en choiſiſſant quelque propriété, qui faſſe que ce qui eſt requis ſe puiſſe trouver par de moindres nombres que ceux que l'on trouve par quelqu'autre propriété.

Par éxemple, ſi l'on cherche les hypotenuſes des triangles rectangles, on les trouveroit ſuivant la propriété qu'elles ont, qui eſt que leur quarré eſt la ſomme de deux quarrez : mais on les trouvera beaucoup plus facilement & avec des nombres bien moindres, ſi l'on ſe ſert de la propriété ſuivante, qui eſt que la ſomme de deux quarrez inégaux eſt une hypotenuſe.

Car par la premiere propriété on trouve par éxemple l'hypotenuſe 5, parce que les nombres 9 & 16 joints enſemble font 25, quarré de 5. Mais par la ſeconde je trouveray le meſme nombre 5 en joignant enſemble 4 & 1; ce qui eſt beaucoup plus facile & plus court.

8°. Quelquefois auſſi aprés avoir trouvé une voye pour rencontrer le nombre requis, & ayant déterminé qu'il faut chercher quelque autre nombre pour avoir le requis, ce ſecond ſe trouvera encore par un troiſiéme, & ce troiſiéme par un quartiéme; ce qui ſert quelquefois dans les problêmes impoſſibles pour en démontrer l'impoſſibilité. Comme ſi l'on trouve que pour avoir le 3^e ou le 4^e il ſe faille ſervir du premier, on verra évidemment l'impoſſi-

poſſibilité de la queſtion. Que ſi elle ne paroiſt pas fort clairement, cela fait au moins que pour des nombres de deux ou trois lettres qu'on éxamine, eſtant par-aprés appliquez à la queſtion, les nombres qui en proviendront auront au moins dix ou douze lettres, & par ce meſme moyen on rejette auſſi une grande multitude de nombres ſuperflus.

9°. Que ſi la queſtion demande plus d'un nombre, comme ſi l'on requiert un triangle dont l'hypotenuſe ſoit un quarré, & l'enceinte auſſi un quarré, on voit qu'il y a deux nombres auſquels on attribuë la proprieté d'eſtre quarrez. En ce cas on recherchera les moyens de faire chacun d'iceux ſéparément; & pour cela on ſe ſervira des moyens cy-deſſus déduits; puis on conferera les proprietez de chacun des nombres trouvez l'une avec l'autre, & l'on remarquera ſi celles de l'un peuvent compatir avec celles de l'autre, car ſi une des proprietez d'un des nombres détruiſoit celles de l'autre, ou quelqu'une d'icelles, la queſtion ſeroit impoſſible.

10°. Si en la recherche on a trouvé pluſieurs nombres tels qu'il eſt requis, on remarquera leurs proprietez particulieres, qui les font diſtinguer d'avec les autres nombres, & qui ſoient communes à tous les nombres d'une meſme eſpece, en conſiderant ſi tout ce qui a ladite proprieté, a auſſi l'autre proprieté qui eſtoit requiſe. Par éxemple, aprés avoir remarqué que les nombres premiers qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4, ſont la ſomme de deux quarrez, je regarderay ſi tous les nombres premiers qui ſont la ſomme de deux quarrez, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4; & voyant que pluſieurs deſdits nombres de ſuite à commencer par le moindre, & ſans en obmettre aucun, ont cette condition, comme ſont 5, 13, 17, 29, &c. je conclus que ladite proprieté convient à tous les autres premiers, qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4.

Quelquefois auſſi on trouve certaines exceptions auſquelles il faut avoir égard, & conſiderer tout ce qui doit eſtre compris dans leſdites exceptions, en remarquant leur origine & d'où elles proviennent.

Il faut remarquer que cette recherche ne sert principalement qu'aux questions possibles, qu'elle trouve ordinairement sans beaucoup de travail, ne se servant pour la plusspart d'autre démonstration que de la construction: au moins c'est-là son principal but. C'est pourquoy, le plus souvent aux questions impossibles elle donnera bien des voyes pour aller bien avant, & rechercher avec peu de travail jusqu'à des nombres fort grands, encore qu'on ne puisse pas arriver au but desiré, à cause de l'impossibilité de ce qui est proposé.

Il arrive aussi par fois, qu'en recherchant des voyes plus courtes & plus faciles, & voulant essayer tous les moyens de parvenir au but désiré, on trouve des contradictions & absurditez qui font voir l'impossibilité.

PREMIER EXEMPLE.

Deux quarrez estant donnez, trouver le triangle qui est formé desdits quarrez; par éxemple, 64 & 25 estant donnez, on demande le triangle.

Cette question suppose qu'on sçache que les triangles sont formez par le moyen de deux quarrez, dont la somme est l'hypotenuse; & partant par le premier précepte, je chercheray quelques-uns des premiers triangles dont je sçauray les quarrez, comme 3, 4, 5, qui est formé par les quarrez 4 & 1: j'essayeray donc à trouver lesdits 3, 4, 5, par le moyen de 4 & 1. Et premierement je voy que la somme de 4 & 1, est l'hypotenuse 5, & la différence des mesmes 4 & 1, est le costé impair 3, reste donc à trouver le costé pair 4. Je voy bien que le produit de 4 par 1 donne 4, mais cela ne pourroit pas arriver aux autres quarrez, par ce que d'ordinaire le produit de deux nombres est plus grand que leur somme; & partant, si le costé pair estoit le produit des deux quarrez, il seroit presque toûjours plus grand que la somme, qui est l'hypotenuse: ce qui ne se peut.

Il

Il faut donc former 4 par une autre voye: & puisque les quarrez ne le donnent pas facilement, j'aurray recours à leurs racines 2 & 1, dont le produit est 2, le double duquel est 4.

Je considere maintenant si la mesme chose se fait & se trouve aux autres triangles.

Ainsi ayant 9 & 4, qui sont le triangle 5, 12, 13, je voy que la somme desdits 9 & 4 est l'hypotenuse 13, & leur différence est le costé impair 5. Pour le costé pair je prens les racines desdits quarrez, qui sont 3 & 2; leur produit est 6, dont le double qui est 12, est le costé pair dudit triangle.

J'éxamineray encore la mesme chose aux triangles suivans 8, 15, 17, qui provient de 16, & 1, & à 20, 21, 29, qui est fait par 25 & 4; ce qui me donne à connoistre que cette regle convient à tous les triangles, puisqu'elle est propre à ceux que nous venons d'examiner, qui sont assez différens les uns des autres, sinon les deux premiers 3, 4, 5, & 5, 12, 13, qui se ressemblent en ce que le grand costé n'est différent de l'hypotenuse que de l'unité.

Je viendray donc aux quarrez proposez 64 & 25; & leur appliquant ladite regle, je trouveray le triangle 39, 80, 89.

SECOND EXEMPLE.

Un quarré estant donné, trouver un autre quarré, qui estant joint avec le donné, fasse un troisiéme quarré.

On donne par éxemple 64.

Je cherche deux quarrez, qui estant joints ensemble, fassent un quarré, comme sont 16 & 9, dont la somme est 25.

Puis je cherche quelque voye par le moyen de laquelle je trouve 9 avec 16; car icy il faut choisir le quarré pair 16, puisque le donné, sçavoir 64, est pair: ou si je ne puis trouver 9 facilement, je chercheray sa racine 3.

Si j'oste 1 de la racine de 16, sçavoir de 4, il restera 3, racine

 de

de 9: je regarde donc aux autres quarrez pairs si la mesme chose arrivera.

Je prens par éxemple 36, dont la racine 6 estant diminuée d'1, reste 5; le quarré duquel, sçavoir 25, estant joint à 36, donne 61 qui n'est point quarré: ce qui me donne à connoistre que cette regle n'est pas la vraye, puisqu'elle n'est pas génerale, quoyqu'il pourroit arriver en d'autres questions, que certains quarrez n'auroient pas la proprieté requise. Mais je trouve icy que 36 estant joint au quarré 64, donne 100, qui est un quarré; & partant ledit 36 n'est pas exclus d'avoir ladite proprieté.

Je cherche donc quelque autre convenance de 9 à 16; & parce que 4 y estoit propre dans la premiere regle, je regarde si je ne pourray point tirer 4 de 16 autrement qu'en le considerant comme racine de 16.

Je voy que 4 est le quart de 16. Je le considereray donc en cette qualité, & par mesme moyen j'éprouveray la mesme chose au susdit 36 dont le quart est 9, duquel ostant 1, reste 8, dont le quarré 64 estant joint à 36, donne 100, qui est un quarré: ce qui me fait présumer que la regle est bonne, & on en pourra estre entierement asseûré en l'essayant sur d'autres quarrez.

Je prens donc le quart du quarré donné 64, qui est 16, dont osté 1, reste 15, le quarré duquel 225 estant joint à 64, donne 289 quarré de 17, qui surpasse ledit quart 16 de la mesme unité.

Mais je voy aussi que le mesme 64 estant joint à 36, fait un quarré; & partant afin que la regle soit plus parfaite, il sera bon de donner un moyen pour trouver tous les quarrez ausquels un quarré estant joint, donne un autre quarré. Je l'éprouve à 64, & ayant pris son quart 16, je cherche le moyen de trouver par iceluy la racine de 36 qui est 6. Ce 6 est la moitié moins 2 de 16: or pour avoir la moitié il faut diviser par 2; de sorte que ce 2 pourroit passer pour partie de 16, & dans cette considération on a pû aussi prendre l'unité quand on l'a osté de 16.

De mesme donc que j'ay pris la somme & la différence de 16 &

1,

1, qui ſont comme parties rélatives de 16 pour avoir 17 & 15, qui ſont les racines des quarrez requis : de meſme auſſi je prendray 2 & 8 pour parties rélatives du meſme 16, la ſomme & la différence deſquelles eſt 10 & 6, dont les quarrez 100 & 36 ſont tels qu'il eſt requis; car joignant 36 à 64, on a 100.

Je prendray garde par aprés ſi la meſme choſe arrive aux autres quarrez qui ont plus de parties.

Je prens donc 144, & cherche les quarrez auſquels eſtant joint on peut avoir un quarré.

Son quart eſt 36. Les parties rélatives de 36 ſont 1, 36.] 2, 18.] 3, 12.] & 4, 9: il n'y en a point d'autres, car 6 & 6 ſont ſemblables; ce qui fait qu'ils n'ont point de différence dont on ſe puiſſe ſervir.

Je prens la ſomme & la différence de chaque couple deſdites parties, & trouve 37, 35.] 20, 16.] 15; 9.] & 13, 5. & partant 144 eſtant joint au quarré de 35, qui eſt 1225, fait 1369, quarré de 37.

Le meſme 144 eſtant joint à 256, quarré de 16, donne 400, quarré de 20.

144 avec 81, quarré de 9, donne 225, quarré de 15.

Et enfin 144 avec 25, quarré de 5, donne 169, quarré de 13.

Pour voir ſi 144 ne ſe peut joindre qu'à 4 quarrez pour faire un quarré, & 64 à 2 ſeulement; je conſidere que lors qu'un quarré eſtant joint à un autre quarré, fait un quarré, les racines de ces trois quarrez ſont les coſtez d'un triangle. Je verray donc à combien de triangles la racine du quarré donné ſert de coſté; & je trouve que 8, racine de 64, ne ſert de coſté qu'à deux triangles; & 12, racine de 144, ne ſert qu'à quatre. Puis donc que j'ay trouvé la meſme choſe auſdits quarrez par l'éxamen des parties de leur quart, j'inféreray que la regle eſt bonne. Que ſi ces deux éxemples n'en donnent pas une entiere aſſeurance, on le pourra encore éprouver ſur d'autres quarrez.

Mais ſi on ne ſçavoit pas à combien de triangles un nombre donné ſert de coſté, il faudroit éxaminer leſdits quarrez d'une autre ſorte, ſçavoir en joignant le donné avec pluſieurs quarrez, pour voir ſi la ſomme feroit un quarré; & pour y parvenir on ſe

pourra servir des exclusions dont on a cy-devant parlé; & voicy comme on y procedera, prenant 144 pour éxemple.

Je considére premierement si cét éxamen a des bornes, ou si on peut éxaminer utilement lesdits quarrez à l'infini; & pour ce qu'il faut ajouster à 144 un quarré pour avoir un autre quarré, il s'ensuit que 144 doit estre la différence de deux quarrez.

Je considere donc quelle doit estre la différence de deux quarrez, & je trouve que les quarrez allant toûjours en augmentant, leurs différences augmentent aussi à mesure : de sorte que deux quarrez, dont les racines ont pareille différence que celles de deux autres quarrez, n'auront pas entre eux pareille différence; mais les quarrez les plus grands auront plus grande différence, ainsi 25 & 64, dont les racines 5 & 8 ont 3 pour différence, different plus entre eux que 4 & 25, dont les racines 2 & 5 ont pareille différence qui est 3.

Puis donc que les différences augmentent toûjours, il s'ensuit que 144 a des bornes, & qu'il ne faut pas poursuivre l'éxamen que jusqu'à certains quarrez.

Or le quarré proposé estant pair, il ne peut pas estre la différence de deux quarrez dont les racines ne différent que de l'unité, parce que de ces deux quarrez, l'un estant pair & l'autre impair, la différence seroit impaire.

Mais dans les 4 couples de quarrez qu'on a trouvez, ausquels 144 sert de différence, on a ceux de 35 & 37, qui sont les plus grands ausquels ledit 144 puisse servir de différence; car puisque lesdites racines doivent avoir au moins 2 de différence, si on prenoit deux autres nombres plus grands que 35 & 37, & qui eussent une pareille différence, il est certain que la différence de leurs quarrez seroit plus grande que celle des quarrez de 35 & 37, qui est 144.

Il faut donc à 144 ajouster tous les quarrez jusqu'à celuy de 35, & voir si quelques-unes des regles des exclusions auront icy lieu.

Et premierement celle qui exclut les multiples ne peut pas estre icy employée, puisque 144 peut aussi-bien estre la différence de deux quarrez composez entr'eux, que premiers entr'eux.

Mais on aura égard à la cinquiéme regle qui considere les finales

les, lesquelles dans les quarrez sont 1, 4, 5, 6, 9 & 0.

Si à 144 on ajouste un quarré finissant par 1, la somme finira par 5; mais 5 est toûjours précédé de 2 dans les quarrez, & partant il faudra que ledit 1 soit précédé de 8, afin que ce 8 estant joint à la pénultiéme lettre 4, on ait 2 pour pénultiéme; & partant si le quarré qu'on ajouste finit par 1, il doit au moins finir par 81.

4 estant joint à 4 donne 8, qui n'est point une finale quarrée, & partant on n'ajoustera point à 144 les quarrez qui finissent par 4.

Pareillement les quarrez qui finissent par 9, ne pourront estre ajoustez à 144, parce que la somme auroit 3 pour finale, qui partant ne seroit point quarrée.

Mais on pourra joindre à 144 les quarrez qui finiront par 5 & 0.

On y pourra joindre aussi les quarrez finissans par 6, pourveu qu'ils finissent par 56, afin que la somme ait 00 pour finale.

Cela posé, il ne faudra point ajouster à 144 les quarrez 1, 4, 9 & 16, pour les causes déduites, ni le quarré qui suit 144, sçavoir 169 dont la différence à 144 est 25.

Aprés 25 il faudra venir à 36, 49 & 64, qu'il faut laisser pour les mesmes causes cy-dessus déduites.

81 estant joint à 144 donne 225, quarré de 15.

100 estant joint à 144 donne 244, qui n'est point quarré.

121, 169, 196, doivent estre laissez à cause des finales.

225 joint à 144, donne 369, qui n'est point quarré.

256 joint à 144 donne 400, quarré de 20.

289, 324, 361, seront laissez à cause des finales.

400 & 144 donnent 544, qui n'est point quarré.

441, 484, 529, 576, 676, 729, 784, 841, 961, 1024 & 1089, seront aussi laissez à cause des finales.

625 joint à 144 donne 769, qui n'est point quarré.

900 joint à 144 donne 1044, qui n'est point quarré.

1156 joint à 144 donne 1300, qui n'est point quarré

Enfin 1225, quarré de 35, joint à 144, donne 1369, quarré de

de 37. Nous n'avons donc que les 4 couples de quarrez cy-devant trouvez, ausquels 144 serve de différence.

Jusqu'icy on a éxaminé la question en supposant un quarré pair donné: mais qui voudra voir tout ce qui dépend de la question, doit considerer la methode de trouver la mesme chose, le quarré donné estant impair; par éxemple, 81 estant donné trouver un quarré qui estant joint avec iceluy fasse un autre quarré.

Je prens pour cet éffet quelque quarré connu, comme 9, auquel je sçay qu'adjoustant 16 on a 25.

Je cherche donc un moyen pour trouver 16, ou sa racine 4 avec le quarré donné 9.

Je voy d'abord qu'ostant 1 de 9, & prenant la moitié du reste, on aura 4. Je considereray donc la mesme chose aux autres quarrez impairs.

Ainsi je trouve qu'ostant 1 de 25 reste 24, dont la moitié est 12, le quarré duquel 144 estant joint à 25, donne 169, quarré de 13.

La mesme chose arrivera aussi à 49 & à 81, car celuy-cy estant joint à 1600, quarré de 40, donne 1681 quarré de 41.

On pourra aussi considerer que les quarrez impairs dont la racine n'est pas un nombre premier, peuvent estre joints avec plusieurs quarrez pour faire un quarré.

Ainsi éxaminant 81 comme on a fait cy-devant 144, on trouvera qu'estant joint audit 144, il fera 225 quarré de 15.

Il faudra donc trouver une voye pour rencontrer 144, ou sa racine 12, par le moyen de 81.

Or puisque nous sçavons que les quarrez dont la racine est un nombre premier, ne peuvent estre joints qu'avec un seul quarré pour faire un quarré, comme on peut voir à 9, 25, 49, &c. & que ceux dont la racine est composée peuvent estre joints avec plusieurs, cela fait présumer que les parties desdits quarrez sont cause de cela; car 9, par éxemple, ne peut estre fait par multiplication de nombres différens, que par 1 & 9; de mesme en est-il

il de 25 qui n'a que 1 & 25, & ainsi des autres. Mais 81 peut estre fait par 1 & 81, & par 3 & 27.

A cause de 1 & 81, on trouve le quarré de 40 & celuy de 41; car on voit qu'ostant 1 de 81, la moitié du reste est 40, de mesme ajoustant 1 à 81, la moitié de la somme est 41.

On agira donc de mesme aux autres parties de 81, sçavoir 3 & 27, prenant la moitié de leur somme & de leur différence. La somme est 30, la différence 24, la moitié desquelles est 15 & 12: on verra donc si ajoustant à 81 le quarré de 12, on aura celuy de 15, ce qui se trouve estre ainsi.

On éprouvera la mesme chose sur quelqu'autre quarré, dont la racine sera composée, comme sur 225 quarré de 15.

Les parties rélatives de 225 sont 1, 225,] 3, 75,] 5, 45, & 9, 25.

La moitié de la somme & de la différence desdites parties sont 113, 112,] 39, 36,] 25, 20,] & 17, 8.

Partant si on ajouste 225 au quarré de 112, on aura le quarré de 113.

225 joint au quarré de 36, donne celuy de 39.

225 estant joint au quarré de 20, donne celuy de 25.

Et enfin 225 avec le quarré de 8, donne celuy de 17.

TROISIÉME EXEMPLE.

Un nombre estant donné, déterminer s'il est hypotenuse de quelque triangle, & quels sont les deux costez dudit triangle.

Afin de donner facilement la solution de cette question, dans laquelle si l'on proposoit quelque nombre particulier, comme si on demandoit si 221 est hypotenuse; il faut voir si on pourra remarquer quelque sorte de nombres affectez particulierement aux hypotenuses; & pour y parvenir je me serviray du second précepte, puisque je ne sçay pas encore les propriétez particulieres des

hypotenuſes, & que ce ſont elles qu'il faut chercher. Mais il faut ſçavoir ce que c'eſt qu'une hypotenuſe, & quel moyen on a d'en trouver quelqu'une.

Que la proprieté ſuivante ſoit donnée.

Le quarré de l'hypotenuſe d'un triangle rectangle vaut autant que les quarrez des deux autres coſtez du triangle.

Partant ſi l'on joint chaque quarré à chaque quarré, on aura les quarrez de toutes les hypotenuſes, ſçavoir, quand la ſomme des deux quarrez viendra à eſtre quarrée.

Je cherche donc par le ſecond précepte toutes les hypotenuſes ſans en obmettre aucune, commençant par la moindre, & pour y parvenir j'aſſemble tous les quarrez.

Mais de peur de s'embaraſſer, & pour n'obmettre aucune hypotenuſe, je forme quelqu'ordre par le troiſiéme précepte, par lequel je puiſſe pourſuivre l'aſſemblage deſdits quarrez auſſi loin que je voudray, & tel auſſi (autant que faire ſe pourra) qu'on puiſſe s'arreſter où on voudra, ſans que le travail qu'on aura commencé oblige à continuer bien avant, & auſſi ſans qu'on ſoit obligé (en cas qu'on vouluſt pourſuivre la recherche plus avant) de reprendre ce qu'on auroit quitté. Ce qui ſe doit entendre, ſi cela ſe peut faire commodement.

†	4. 1	5.
	9. 1	10.
†	9. 4	13.
†	16. 1	17.
	16. 4	20.
†	16. 9	25. ℞ 5.
	25. 1	26.
†	25. 4	29.
	25. 9	34.
†	25. 16	41.

Par éxemple, ſi pour aſſembler leſdits quarrez, on ajouſtoit au premier quarré 1 tous les autres quarrez juſqu'à celuy de 200, & que par aprés on vint à les ajouſter à 4, puis à 9, on s'obligeroit, pour avoir toutes les hypotenuſes moindres, de parcourir preſque tous les quarrez, & on entreprendroit un grand travail, ſans peut-eſtre en avoir beſoin.

Au contraire, ſi aprés avoir aſſemblé tous leſdits quarrez l'un à l'autre, on vouloit pouſſer la recherche plus avant, il faudroit reprendre ce qu'on auroit laiſſé, car il faudroit recommen-

†	36. 1	37.
	36. 4	40.
	36. 9	45.
	36. 16	52.
†	36. 25	61.
	49. 1	50.
†	49. 4	53.
	49. 9	58.
†	49. 16	65.
	49. 25	74.
†	49. 36	85.
†	64. 1	65.
	64. 4	68.
†	64. 9	73.
	64. 16	80.
†	64. 25	89.
	64. 36	100. ℞ 10.
†	64. 49	113.
	81. 1	82.
†	81. 4	85.
	81. 9	90.
†	81. 16	97.
	81. 25	106.
	81. 36	117.
	81. 49	130.
†	81. 64	145.

mencer à 1, & luy ajouſter les quarrez plus grands que celuy de 200, ce qui apporteroit quelque deſordre. Il vaudra donc mieux prendre un autre ordre, comme cy-aprés.

Je prens le quarré 4, & luy ajouſte 1.

Puis je viens à 9, & luy ajouſte tous les moindres, commençant à 1.

Puis je prens 16, & luy ajouſte les quarrez moindres 1, 4, 9, & je mets la ſomme enſuite de chaque couple de quarrez, comme on voit icy. Et continuant en cette façon autant loin qu'on voudra, je remarque les couples dont la ſomme eſt quarrée, parce que la racine de ce quarré eſt l'hypotenuſe d'un triangle.

Et par le moyen de cette addition on trouvera des hypotenuſes, & aucune ne pourra eſtre obmiſe.

Mais parce que je voy qu'il arrive peu ſouvent que la ſomme ſoit un quarré, je conſidere s'il n'y a rien de ſuperflu dans cette table.

Les nombres qu'on veut avoir doivent eſtre quarrez: je conſidereray donc quelque propriété du quarré, comme que tout quarré eſt pairement pair, ou pairement pair + 1.

Mais ſi on ajouſte enſemble deux quarrez impairs, comme 9 & 1,] 25 & 9, la ſomme ſera impairement paire; parce que les deux quarrez eſtant chacun un pairement pair + 1, les deux enſemble feront un pairement pair + 2, qui eſt un impairement pair.

De-là on conclura qu'il eſt ſuperflu d'ajouſter enſemble deux quarrez impairs, car leur ſomme eſtant impairement paire, ne peut pas eſtre quarrée.

Je conſidere auſſi ſuivant le quatriéme précepte, ſi les quarrez compoſez entr'eux peuvent eſtre exclus, comme eſtant multiples d'autres couples de quarrez premiers entr'eux.

Je trouve que les triangles eſtant multipliez par quelque nombre que ce ſoit, donnent toûjours d'autres triangles, car la proportion des coſtez ne change point; & ſi deux quarrez eſtant joints enſemble font un quarré, ſi on multiplie leſdits quarrez par quelque quarré, il eſt certain que la ſomme de ces multiples ſera encore un quarré, qui ſera meſuré par le meſme quarré qui aura multiplié les deux autres.

Il faudra donc retrancher de la table les quarrez qui ſont de meſme ordre, & ceux qui ont une commune meſure.

Reſte donc de pourſuivre la table, en joignant les quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres, leſquels auſſi je marqueray en la table précédente, afin de les diſtinguer des autres.

100.	1	101.
100.	9	109.
100.	49	149.
100.	81	181.
121.	4	125.
121.	16	137.
121.	36	157.
121.	64	185.
121.	100	221.
144.	1	145.
144.	25	169. ℞ 13.
144.	49	193.
144.	121	265.

On pourroit par aprés avoir égard aux finales, ainſi qu'il eſt montré au cinquiéme précepte; car on voit que dans cette ſeconde table, quoy-qu'il y ait déja un grand racourciſſement; néanmoins ſi on vouloit oſter toutes les finales inutiles, il y en auroit encore un beaucoup plus grand.

On pourroit enſuite conſiderer quelque propriété des quarrez, comme, que ceux qui ne ſont point meſurez par 3, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 3. Mais parce qu'on a deja exclu les quarrez qui ont une commune meſure, il s'enſuit qu'il n'y aura aucune des ſommes ſuſdites qui ſoit meſurée par 3; car pour eſtre telle, il faudroit que cha-

cun

169.	4	173.
169.	16	185.
169.	36	205.
169.	64	233.
169.	100	269.
169.	144	313.
196.	1	197.
196.	9	205.
196.	25	221.
196.	81	277.
196.	121	317.
196.	169	365.
225.	4	229.
225.	16	241.
225.	64	289. ℞ 17.
225.	196	421.
256.	1	257.
256.	9	265.
256.	25	281.
256.	49	305.
256.	81	337.
256.	121	377.
256.	169	425.
256.	225	481.

cun des quarrez fuſt multiple de 3, puiſque les quarrez ſont, ou multiples de 3, ou multiples de 3+1; partant ſi chacun des quarrez ſurpaſſe de l'unité un multiple de 3, la ſomme ſera multiple de 3+2, ou multiple de 3—1, & partant elle ne pourra pas eſtre quarrée.

Il faudra donc que des deux quarrez qu'on ajouſte, l'un ſoit multiple de 3, & l'autre multiple de 3+1, ce qui exclut encore beaucoup d'additions.

Mais avant que de continuer ladite table ſuivant les régles deſdites excluſions, il faut voir ſi les ſommes quarrées qu'on a trouvées ne pourront rien apprendre touchant ce qui eſt propoſé, & ſi on ne pourra point trouver quelque propriété deſdites hypotenuſes, outre celle en vertu de laquelle on les a trouvées juſques icy.

Je trouve icy 25, 100, 169, & 289, qui entre leſdites ſommes ſont quarrées; mais 100 eſt du nombre de celles qui ont eſté rejettées, parce qu'il provient de deux quarrez qui ont une commune meſure.

Les racines de ces nombres, ſçavoir 5, 10, 13, 17, ſeront donc hypotenuſes de triangles rectangles dont les deux autres coſtez ſeront les racines des quarrez qu'on a aſſemblez pour avoir leſdits quarrez 25, 100, 169, 289.

Ainſi 25 eſtant la ſomme des quarrez 16 & 9, les racines des trois quarrez 25, 16, 9, qui ſont 5, 4, 3, ſeront les coſtez d'un triangle rectangle.

Mais en conſiderant ma premiére table, je voy qu'elle contient leſdits nombres 5, 10, 13, 17, que j'ay trouvé eſtre hypotenu-

ſes, & qu'ils ſont de ſuite dans la colomne où ſont lès ſommes des quarrez ; car 4 & 1 donnent 5,] 9 & 1 donnent 10,] 9 & 4 donnent 13,] & 17 vient de 16 & 1 : il ſe pourroit donc faire que non ſeulement les quarrez des hypotenuſes ſont la ſomme de deux quarrez, mais auſſi que les hypotenuſes meſmes ſont pareillement la ſomme de deux quarrez ; ce qu'il faut éxaminer.

Je voy déja que 5, 13 & 17, ſont hypotenuſes ; & de plus j'ay dans la table pluſieurs multiples deſdits 5, 13 & 17, qui ſont pareillement hypotenuſes, comme 10, 20, 40, 45, 26, 34, &c. & qui ſont auſſi la ſomme de deux quarrez.

Il faut donc voir ſi les autres nombres premiers de la table ſont pareillement hypotenuſes, ſçavoir 29, 41, 37, 61, &c.

Mais parce qu'il ſeroit trop long d'éxaminer ſi les quarrez deſdits nombres ſont la ſomme de deux quarrez, je cherche quelqu'autre voye qui n'oblige point de conſiderer leſdits quarrez.

Cette voye ſera de ſatisfaire à la ſeconde partie de la queſtion, ſçavoir de donner les deux autres coſtez du triangle, ce qui ſe trouvera par la premiere regle, puiſqu'on a les quarrez dont l'hypotenuſe eſt la ſomme, & qu'on ſçait les coſtez de quelques triangles, ſçavoir, de ceux dont 5, 13 & 17 ſont hypotenuſes. Car par la table ſuſdite on voit que 5 eſt hypotenuſe, & que 3 & 4 ſont les coſtez, parce que 25 quarré de 5, eſt la ſomme de 9 & 16, quarrez de 3 & 4 ; de meſme on trouvera que 5 & 12 ſont les coſtez du triangle dont 13 eſt hypotenuſe, & que 8 & 15 ſont les coſtez du triangle 8, 15, 17.

Cela ſuppoſé on requiert une voye, ou regle, par laquelle on puiſſe trouver leſdits coſtez, ſçachant ſeulement l'hypotenuſe & les deux quarrez dont elle eſt la ſomme.

Cette regle ſe trouvera par le premier éxemple qui a éſté donné cy-devant ; & l'appliquant à tous les nombres de la table, je trouve les coſtez des triangles dont ils ſont hypotenuſes. Par éxemple, 29 eſt la ſomme de 25 & 4, la différence deſdits quarrez qui eſt 21 eſt le coſté impair : ſi donc 29 eſt hypotenuſe, & 21 l'un

l'un des costez de son triangle, il faudra que le quarré de 21 estant osté de celuy de 29, il reste un quarré dont la racine soit l'autre costé du triangle. J'oste donc 441 quarré de 21, de 841 quarré de 29, reste 400 quarré de 20, qui est l'autre costé, & partant 29 est hypotenuse. La mesme chose se pourra éxaminer aux autres hypotenuses suivantes, & mesme aussi aux multiples; car si en les prenant de suite, & sans aucun choix, on trouve la mesme chose à toutes, je conclus que ladite regle est générale, sçavoir, que la somme de deux quarrez inégaux est l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont les costez sont tels nombres qu'on voudra.

Mais il ne faut pas se contenter de cela, car il faut éxaminer la converse, sçavoir si toute hypotenuse est la somme de deux quarrez.

J'ay icy de deux sortes d'hypotenuses, sçavoir, de primitives, qui sont nombres premiers, ou au moins qui servent à des triangles dont les costez n'ont point de commune mesure, & d'autres qui sont multiples d'autres hypotenuses primitives, & dont les costez ne sont pas premiers entr'eux, mais qui se peuvent mesurer par un mesme nombre.

Pour ce qui est des hypotenuses primitives, je voy icy plusieurs nombres qui servent d'hypotenuse à des triangles fort différens, comme 3, 4, 5,] 8, 15, 17,] 20, 21, 29,] 28, 45, 53, &c. qui sont tous la somme de deux quarrez; partant il n'y a aucune apparence qu'il y ait d'autres nombres premiers qui soient hypotenuses, & qui ne soient point la somme de deux quarrez; car les uns ne peuvent pas avoir plustost cette propriété que les autres, puisqu'elle se trouve en plusieurs triangles fort différens. Que si on s'en vouloit asseurer davantage, il faudroit éxaminer quelques-uns des autres nombres premiers en les prenant de suite, comme 7, 11, 19, 23, & voir si leurs quarrez sont la somme de deux quarrez; ce qui se pourra faire, en ostant, par exemple, de 529 quarré de 23, les quarrez qui sont moindres, & considerant si le reste sera quarré, en se servant pour cet effet des finales des

des quarrez. Mais on trouvera toûjours que les nombres premiers qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, ont un quarré qui n'eſt point auſſi la ſomme de deux quarrez: ainſi parce que 23 n'eſt point la ſomme de deux quarrez, ſon quarré 529 ne la ſera pas auſſi.

Reſte donc à éxaminer les multiples, & pour cet éffet je prens quelque hypotenuſe primitive, comme 5, & je la multiplie par pluſieurs nombres pris de ſuite ſans aucun choix, & ſans en obmettre aucun, comme par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & j'auray 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, &c. leſquels derniers nombres ſont de néceſſité hypotenuſes, puiſqu'ils ſont multiples de 5, car on a trouvé que multipliant un triangle par quelque nombre que ce fuſt, on a encore un triangle dont les coſtez ont entr'eux meſme proportion.

Je regarde par aprés en la premiére table où ſont les aſſemblages de tous les quarrez, tant ceux qui ſont premiers entr'eux, que ceux qui ont une commune meſure, & tant ceux de meſme ordre, que de divers ordres.

En cette table je trouve bien quelques-uns desdits nombres, comme 10, 20, 25, 40, 45, mais je n'y trouve pas les autres, ſçavoir, 15, 30, 35, d'où je conclus que toute hypotenuſe n'eſt pas la ſomme de deux quarrez. Et conſiderant quelle différence il peut y avoir entre les hypotenuſes qui ſont la ſomme de deux quarrez, & celles qui ne le ſont pas, je trouve que les premieres ſont, ou bien multiples d'une hypotenuſe par un quarré comme 20 & 45, ou par un double quarré comme 10 & 40, ou qu'elles ne peuvent eſtre meſurées que par des hypotenuſes comme 25; & paſſant outre en ladite table, on trouveroit encore 50, 65 & 85: mais ces trois dernieres ont encore cela de particulier, qu'en vertu des quarrez dont elles ſont la ſomme, elles ſervent d'hypotenuſe à des triangles primitifs.

Les autres hypotenuſes qui ne ſe trouvent point dans ladite table, & partant qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, comme

me 15, 30, 35, 55, sont multiples d'hypotenuses par des nombres qui ne sont ni quarrez, ni doubles quarrez, ni hypotenuses, car les trois premieres sont multiples de 5, par 3, 6 & 7.

Mais il faut voir si on ne pourra point découvrir quelqu'autre propriété des hypotenuses; & pour y parvenir, je considere les seules hypotenuses primitives, laissant-là les multiples qui n'ont autre chose que ce qu'elles empruntent de leurs primitives, dont voicy quelques-unes.

5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109.

Je voy premierement que tous les nombres premiers ne sont pas en ce rang, & qu'il y a aussi des nombres composez meslez parmi, mais non pas tous, car on n'y trouve point 21, 49, & autres.

Afin donc de débrouiller un peu ces nombres, je les sépare en premiers & composez, & je regarde quelles sont les parties des composez, 25 est le quarré de 5, 65 a pour parties 5 & 13, & 85 a 5 & 17.

Je considere que lesdits nombres 5, 13 & 17 sont compris entre les nombres premiers qui sont hypotenuses: d'où je conclus que les nombres composez de seules hypotenuses sont aussi hypotenuses primitives, de mesme que les nombres premiers dont ils sont composez.

Reste donc à considerer les nombres premiers susdits, 5, 13, 17. Je regarde aussi quels sont les autres nombres premiers qui ne se trouvent point en ma liste. Ces nombres sont 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, &c. je compare les uns avec les autres, pour voir si les premiers n'ont point quelque propriété qui ne soit point aux derniers, & je trouve que les hypotenuses, sçavoir 5, 13, 17, &c. surpassent toutes de l'unité un multiple de 4, & que les derniers 3, 7, 11, &c. sont tous moindres de l'unité qu'un multiple de 4, d'où on tirera ce théorême.

Tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est hypotenuse; & tout nombre premier qui est hypotenuse, surpasse de l'unité un multiple de 4.

Par cette propriété il sera facile de résoudre le problême, en divisant le nombre donné en ses parties, s'il en a, & voyant si quelqu'une d'icelles est un nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4.

Si on suppose que toute hypotenuse primitive est la somme de deux quarrez de divers ordres, la conséquence est bien facile à tirer, que cette hypotenuse surpasse de l'unité un multiple de 4; car tout quarré impair surpasse de l'unité un multiple de 4, (il n'est pas besoin d'en excepter 1) & partant un quarré impair estant joint avec un pair, (qui est toûjours pairement pair) fera un pairement pair+1.

Pour ce qui est de trouver le triangle, on verra par ce qui a ésté dit, si le nombre donné est la somme de deux quarrez, & on cherchera quels sont lesdits quarrez, en ostant dudit nombre le quarré prochainement moindre, & puis le suivant; & voyant à chaque soustraction, si ce qui reste est quarré, ce qui est déduit ailleurs plus au long; & ayant les deux quarrez dont le nombre est la somme, on aura le triangle comme cy-devant.

La précédente perquisition auroit pû estre conduite d'une autre sorte, car puisqu'il faut que deux quarrez joints ensemble fassant un quarré, je prendray tous les quarrez l'un aprés l'autre, & verray par le second éxemple quel quarré il luy faut adjouster pour faire un autre quarré; car par ce moyen on auroit promptement les quarrez de toutes les hypotenuses, tant primitives que multiples sans en excepter aucune. Et afin de n'avoir point deux fois les mesmes nombres, il ne faudra remarquer que les quarrez qui sont moindres que celuy qu'on éxaminera.

Par éxemple, ayant 16, son quart est 4; les parties rélatives de 4 sont 1 & 4; leur différence est 3, qui est moindre que 4 racine de 16; & partant je retiendray le quarré 9, qui estant joint à 16 donne 25, quarré de l'hypotenuse 5.

QUA-

QUATRIÉME EXEMPLE.

Un nombre composé estant donné avec les parties premieres & analogiques, déterminer à combien de triangles il sert d'hypotenuse.

Puisque le nombre est composé, il servira d'hypotenuse à quelques triangles multiples; & s'il est composé de seules hypotenuses, il servira aussi à des triangles primitifs: mais parce que les multiples proviennent nécessairement de primitifs, on s'arrestera premierement aux seuls primitifs.

Je trouve dans ma table quelques nombres composez, comme 25, 65, 85, & je trouve que 25 ne sert qu'à un seul triangle primitif, non plus que les nombres premiers: mais 65 & 85 servent chacun à deux triangles primitifs.

Il faut donc qu'il y ait quelque ressemblance entre 25 & les nombres premiers, qui ne soit pas entre 65 ou 85, & lesdits nombres premiers.

Je trouve que 25 ne peut estre mesuré que par un seul nombre premier, non plus que les nombres premiers: mais 65 & 85 se mesurent chacun par deux nombres, celuy-là par 5 & 13 & celuy-cy par 5 & 17.

Et de-là il s'ensuivra que les puissances des nombres premiers ne serviront d'hypotenuse qu'à un seul triangle primitif. Je l'examine à 125 & 625 puissances de 5, & je le trouve ainsi, car chacun desdits nombres n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux: d'où je conclus la vérité dudit théorême.

Mais les nombres qui se mesurent par deux nombres premiers différens, (comme 65 qui se mesure par 5 & 13) servent d'hypotenuse à deux triangles primitifs, puisqu'ils sont deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux.

De-là il s'ensuit que si on multiplie une hypotenuse par un nombre qui la mesure, le produit ne servira pas d'hypotenuse à plus

de triangles primitifs; par éxemple, 325 ne doit ſervir d'hypotenuſe primitive qu'à deux triangles, non plus que 65: car encore que 325 ſoit meſuré par 5 & 25,] & 65 par 5 ſeulement, néanmoins l'un & l'autre n'eſt meſuré que par les deux nombres premiers 5 & 13; joint que les quarrez, & les autres puiſſances qui ont un nombre premier pour racine, ne ſervent d'hypotenuſe qu'à un ſeul triangle primitif.

Cette remarque ſera confirmée par l'éxamen qu'on fera de 325, par lequel on trouvera qu'il n'eſt que deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, & partant ne ſert d'hypotenuſe qu'à deux triangles primitifs.

Je compoſe par aprés un nombre de trois hypotenuſes premieres, & pour plus de facilité je prens les moindres, ſçavoir 5, 13, 17.

Leur produit eſt 1105, je regarde combien de fois il eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, ce qui ſe fera oſtant de 1105 le quarré prochainement moindre, ſçavoir 1089, le reſte ſera 16 qui eſt un quarré; & partant 1105 eſt la ſomme des deux quarrez 1089 & 16.

J'oſte par aprés du meſme 1105 l'autre quarré précédent, ſçavoir 1024, reſte 81 qui eſt encore un quarré; & ainſi continuant on trouvera que 1105 eſt quatre fois la ſomme de deux quarrez: d'où je conclus qu'il ſert d'hypotenuſe à quatre triangles primitifs.

On pourroit trouver leſdits quarrez d'une autre ſorte, ſçavoir, oſtant le premier quarré 1089, & au reſte 16 ajouſtant 65, qui eſt la ſomme de 33 & 32, racines dudit 1089, & du quarré prochainement moindre.

Et à la ſomme 81 ajouſtant 63 qui eſt la ſomme des deux racines moindres chacune de l'unité que les précédentes, & ainſi continuant tant que ladite ſomme ſera moindre que le reſte, ce qui arrive à la derniere ſomme 529, qui eſtant oſtée de 1105 reſte 576; car ſi on paſſoit outre, la ſomme ſeroit plus grande que le reſte.

16.	4.
65.	
81.	9.
63.	
144.	12.
61	

Au-

Autant de fois qu'on a un quarré pour ladite somme, 205
y comprenant mesme le premier nombre trouvé 16, au- 59
tant de fois le nombre est la somme de deux quarrez: —
mais il faudra prendre garde s'ils sont tous premiers 264
entr'eux, ce qui se connoistra si aucun d'iceux ne se 57
mesure par quelqu'une des parties du nombre, qui sont —
icy 5, 13, 17: mais on a parlé de cecy ailleurs. 321

Je voy donc qu'un nombre qui ne se mesure que par 55
un seul nombre premier, ne sert d'hypotenuse primiti- —
ve qu'à un seul triangle. S'il se mesure par deux nom- 576
bres premiers, il sert à deux triangles. S'il se mesure
par trois nombres premiers, il sert à quatre triangles. 53

Il faut donc voir quel rapport 1, 2, 4, a avec 1, —
2, 3. 429

Je voy que 1, 2, 3, se suivent en l'ordre des nom- 51
bres, & 1, 2, 4, se suivent en l'analogie de 2; par- —
tant il faudroit que le nombre qui auroit quatre nom- 480
bres premiers fust huit fois hypotenuse, & celuy qui 49
en auroit cinq fust seize fois hypotenuse: car de mesme —
que 4 est le troisiéme nombre de l'analogie de 2, & 529. 23.
partant a rapport à 3; de mesme 8 est le quatriéme, & ——
16 est le cinquiéme.

Pour s'asseurer davantage de cette vérité, il faut rechercher quelle raison, ou convenance, on peut apporter de cette proportion.

Puisque les nombres composez servent à plus de triangles que les premiers, il faut que cette augmentation provienne des parties. Or ces parties doivent estre premieres entr'elles, autrement les puissances auroient plus de triangles que leurs racines.

Cela ne provient donc pas simplement de la multitude des parties, mais des parties premieres seulement: mais ces parties premieres ne doivent pas estre prises simplement selon leur multitude, puisque la multitude des triangles n'est pas égale à la multitude desdites parties premieres.

Reste donc à considerer lesdites parties en tant qu'elles composent le nombre: il les faut donc prendre deux à deux en telle sorte toutefois qu'elles soient premieres entr'elles, car autrement elles ne donneroient pas des quarrez premiers entr'eux; & parce qu'ayant pris une des parties, si on veut faire le nombre, l'autre partie vient nécessairement ensuite, on nommera ces parties rélatives; par éxemple, si le nombre est 1105, dont les parties premieres sont 5, 13, 17, quand on prendra 5 pour une des parties, on prendra 13 & 17, (c'est-à-dire le produit de 13 par 17) pour la partie rélative audit 5.

Il faut donc voir en combien de façons on peut faire chaque nombre par deux parties rélatives premieres entr'elles.

Et premierement les nombres premiers, & leurs puissances, ne peuvent estre faits que d'une sorte, sçavoir, en prenant l'unité pour une des parties, & le nombre entier pour l'autre; ainsi 5 ne peut estre fait que par 1 & 5. La mesme chose arrive aux puissances, car 125 cube de 5 ne peut aussi estre fait que d'une façon, sçavoir, par 1 & 125, car si on prenoit 5 & 25, les parties ne seroient pas premieres entr'elles, ainsi qu'il est requis.

Les nombres qui sont mesurez par deux nombres premiers comme 65, qui a 5 & 13 pour parties, peuvent estre faits en deux façons, sçavoir, en prenant 1 d'un costé, & le produit de 5 & 13 de l'autre, & en prenant 5 d'un costé, & 13 de l'autre pour la seconde façon.

Le nombre qui a trois parties, comme 1105 qui a 5, 13, 17, se fait en quatre façons; sçavoir 1 par 5, 13 & 17,] 5 par 13 & 17,] 13 par 5 & 17,] 17 par 5 & 13.

Si le nombre avoit quatre parties premieres, comme 32045, qui a 5, 13, 17, 29, il se feroit en huit façons. On prendra 1 d'un costé, par 5, 13, 17 & 29, ou le nombre entier, puis 5 par 13 17 & 29,] 13 par 5, 17 & 29,] 17 par 5, 13 & 29,] 29 par 5, 13 & 17,] 5 & 13 par 17 & 29,] 5 & 17 par 13 & 29,] 5 & 29, par 13 & 17, qui sont en tout huit façons de faire le nombre donné.

De

De la mesme maniere on trouvera seize façons avec cinq parties, & trente deux façons avec six, &c.

Ayant ainsi trouvé les primitifs, on viendra aux multiples, & pour les trouver, il faudra compter les primitifs de chacune des parties : ainsi ayant 65 dont les parties sont 5 & 13, chacune desdites parties sert à un primitif, & partant 65 servira à deux multiples, & en tout à quatre triangles.

Si on donnoit 325 dont les parties sont 25, 13, de ces deux il faut faire toutes les autres, commençant par celles qui n'ont qu'une partie, & prenant aussi leurs puissances, puis celles qui ont deux parties ; & ainsi on aura 5, 25, 13 & 65, ou 5 par 13, les trois premieres donnent chacune un triangle, & la derniere qui a deux nombres différens en donne deux, & partant ledit 325 aura cinq multiples, qui avec les deux primitifs font en tout sept triangles.

Ayant ces quantitez, je chercheray les moyens de trouver les autres, sans avoir la peine de les compter ; & voici comment on raisonnera pour cet effet.

La multitude des triangles ausquels un nombre sert d'hypotenuse n'augmente pas pour la grandeur des parties, mais seulement pour leur multitude ; par éxemple, le nombre qui sera fait de 13 & 17, n'aura pas plus de triangles que celuy qui proviendra de 5 & 13, car l'un & l'autre n'a que deux nombres premiers : mais si on prenoit 325 qui est fait de 25 & 13, il aura plus de parties, & partant plus de triangles que 65, qui n'a que 5 & 13, comme on vient d'éxaminer ; & partant cette multitude de parties vient, ou de la grandeur des puissances, ou de la multitude des parties premieres & de leurs puissances.

Il faudra donc dans l'éxamen prendre seulement le nombre qui dénote la puissance, sans se soucier de quel nombre il est puissance, puisque sa quantité n'y fait rien.

Ayant donc trouvé que le produit de 5 par 13 a quatre triangles, je cherche les exposans desdites parties premieres, ou de leurs

leurs puissances ; & je trouve 1 & 1 : je chercheray donc un moyen de rencontrer 4 par le moyen de 1 & 1.

Si je double chacun des exposans 1 & 1, j'auray 2 & 2, dont la somme sera 4, qui est le nombre requis.

Il faut donc voir quelqu'autre exemple, pour voir si la mesme chose arrivera.

325 a pour parties premieres & analogiques 25 & 13, & sert d'hypotenuse à sept triangles.

Les exposans desdites parties sont 2 & 1, il est manifeste que le double d'iceux, sçavoir 4 & 2, estant joints, ne feront pas un nombre impair tel qu'est 7, & partant la régle premierement trouvée n'est pas bonne. Il faudra donc chercher un autre rapport entre 1, 1 & 4.

Je trouve que le double du produit de 1 par 1, estant joint aux mesmes 1 & 1, donne 4.

La mesme chose se fera en cherchant 7 par le moyen de 2 & 1, car le double du produit est 4, qui estant joint à 2 & 1 donne 7.

J'éprouve encore cette régle sur d'autres nombres, & je trouve qu'elle convient à tous.

Mais si le nombre se mesuroit par plusieurs nombres premiers, & qu'il y en eust plus de deux, cela pourroit apporter quelque difficulté ; par exemple, si on donnoit 1105 qui se mesure par 5, 13, 17, & qui a 1, 1, 1, pour exposant de ses parties ; il faut par le moyen d'iceux trouver 13, car il sert d'hypotenuse à treize triangles.

Si on prenoit le double du produit des trois exposans, & qu'on luy ajoustast les trois exposans, on n'auroit que 5 ; ce n'est donc pas la régle qu'il faut suivre.

Je prendray donc les exposans deux à deux, & premierement avec 1 & 1 je trouveray 4. Je retiendray ce 4 comme s'il estoit exposant, & le compareray avec le 1 qui reste.

Le

Le double du produit de 1 & 4 eſt 8, auquel joignant les meſmes 1 & 4, on aura 13 comme il eſt requis.

Pour s'aſſurer davantage de cette régle on prendra quelque grand nombre, comme le produit du cube de 5 par le quarré de 13 & par 17.

Les expoſans deſdites parties ſont 1, 2, 3.

Je prens le double du produit de 1 & 2, & luy adjouſte les meſmes 1 & 2 pour avoir 7.

Puis je prens le double du produit dudit 7 par 3 qui reſte, & luy ajouſte les meſmes 7 & 3 pour avoir 52.

Je dis donc que le nombre donné ſert d'hypotenuſe à cinquante-deux triangles.

Je chercheray par une autre voye ſi ledit nombre a cinquante-deux triangles, ſçavoir, en comptant toutes ſes parties, & les triangles primitifs qui appartiennent à chacune.

Pour faire cela plus aiſément on prendra ſeulement les puiſſances, puiſque la diverſité des nombres premiers n'y fait rien.

A.	1	b. q. par C. cub.
B.	1	a. par b. par C. cub.
B. q.	1	a. par C. cub.
C.	1	a. par b. q. par C. q.
C. q.	1	a. par b. q. par C.
C. cub.	1	a. par b. q.
A. par B.	2	b. par C. cub.
A. par B. q.	2	C. cub.
A. par C.	2	b. q. par C. q.
A. par C. q.	2	b. q. par C.
A. par C. cub.	2	b. q.
B. par C.	2	a. par b. par C. q.
B. par C. q.	2	a. par b. par C.
B. par C. cub.	2	a. par b.
B. q. par C.	2	a. par C. q.
B. q. par C. q.	2	a. par C.
B. q. par C. cub.	2	a.
A. par B. par C.	4	b. par C. q.
A. par B. par C. q.	4	b. par C.
A. par B. par C. cub.	4	b.
A. par B. q. par C.	4	C. q.
A. par B. q. par C. q.	4	C.
A. par B. q. par C. cub.	4	o. primitifs.

Somme 52.

Je pose donc que le nombre soit A. par B. q. par C. cub.

Je considere lesdites parties en toutes les façons possibles, prenant premierement celles qui ne servent qu'à un seul triangle primitif, sçavoir, celles où il n'y a qu'une seule puissance ou racine; puis celles qui seront faites de deux différentes puissances, & qui servent à deux triangles; & enfin celles qui contiennent trois puissances, & qui servent à quatre triangles, comme on voit cy-dessus.

Les parties sont premierement en grosses lettres, puis ensuite la multitude des triangles primitifs de ladite partie. Et derriere en petites lettres est la partie rélative, qui est le nombre de multiplicité, sçavoir, le nombre par lequel le triangle est multiple. Par éxemple A. par C. q. sert à deux triangles primitifs, lesquels seront multipliez par b. q. par C. Et supposant que C. cub. soit 125, que B. q. soit 169, & que A. soit 17, on aura 425. Pour A. par C. q. qui servira d'hypotenuse à deux triangles, qu'il faudra multiplier par 845, qui est b. q. par C.

CINQUIÉME EXEMPLE.

Un nombre estant donné, déterminer combien de fois il est la somme de deux quarrez.

Il faut premierement voir si on ne trouvera point quelque propriété particuliere aux nombres qui sont la somme de deux quarrez; afin qu'on puisse connoistre plus facilement si le nombre est la somme de deux quarrez.

Si on n'avoit rien de connu, & qu'on ne sceust point que la somme de deux quarrez inégaux est une hypotenuse, il faudroit assembler les quarrez, & faire une table des sommes, comme on voit au troisiéme éxemple.

Cela fait, je considere plusieurs desdites sommes prises de suite, comme 5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 41, 37, 40, 45, 52, 61, 50, 53, &c. & je regarde si elles n'ont rien de semblable entr'elles que les autres nombres n'ayent point.

Et

Et parce que je voy diverſes ſortes de nombres, je les ſépare par claſſes ſelon leurs diverſitez.

Et premierement, je trouve des nombres pairs & des impairs, des nombres premiers & des compoſez, des impairs premiers & des compoſez, des pairs dont les uns ſont pairement pairs, & les autres impairement pairs.

Je conſidere premierement les nombres premiers comme les plus ſimples, & je trouve 5, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 53.

Je regarde quels ſont les autres nombres premiers non compris en cette table, & j'auray 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59; j'éxamine s'il y a quelque différence entr'eux, & ſi les précédens ont quelque choſe qui ſoit commune à tous, & qui ne convienne à aucun des derniers.

Je trouve que 5, 13, 17, & les autres qui ſont la ſomme de deux quarrez, ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4, ou bien qu'ils ſont pairement pairs+1, & les autres nombres, ſçavoir, 3, 7, 11, &c. ſont tous pairement pairs—1.

Voilà pour ce qui eſt des nombres premiers.

Quant aux compoſez, puis qu'ils ſont de diverſes ſortes, il faut voir d'où peut provenir cette diverſité, & ſi ce ne ſeroit point de la différente façon d'aſſembler les quarrez.

Et ſur cet aſſemblage, je trouve que les nombres premiers ſont tous faits de deux quarrez premiers entr'eux & de divers ordre.

Et que ſi on aſſemble deux quarrez impairs premiers entr'eux, on aura pour la ſomme un impairement pair, qui ſera double d'un des nombres cy-deſſus pairement pair+1.

Et par les autres aſſemblages on trouvera les autres ſommes compoſées.

Il faudra par aprés conſiderer les parties de ces nombres compoſez; & je trouve de deux ſortes de compoſitions; car les uns n'ont point d'autres parties que des nombres premiers pairement pairs+1, ou leurs puiſſances, comme 25, 65, 85. Les autres ont pour parties leſdits nombres premiers, & d'autres qui ſont pairement

 pairs—1,

pairs—1, ou qui ſont de l'analogie de 2. Et conſiderant ces autres nombres qui ne ſont point la ſomme de deux quarrez, je trouve qu'ils ſont tous, ou quarrez, ou doubles quarrez; par éxemple, 10 a pour parties 2 & 5, deſquels 5 eſt la ſomme de deux quarrez, & 2 eſt double quarré.

20 a pour parties 4 & 5, deſquelles 4 eſt un quarré.

45 a pour parties 9 & 5, deſquelles 9 eſt un quarré.

De là je concluray que toût nombre premier pairement pair+1, eſt la ſomme de deux quarrez; & que leſdits nombres premiers eſtant multipliez par un quarré, ou par un double quarré, donnent des nombres qui ſont auſſi ſommes de deux quarrez.

Il faut maintenant conſiderer s'il peut y avoir des nombres qui ſoient pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez.

On voit par la table, que leſdits nombres premiers ne ſont qu'une fois chacun la ſomme de deux quarrez.

Pour les nombres compoſez nous en avons remarqué de deux ſortes, dont les uns ſont multiples d'un nombre, qui eſt la ſomme de deux quarrez par un qui ne l'eſt point, comme 45 qui eſt multiple de 5 par 9, quand on ne verroit point par la table qu'il n'eſt point plus de fois la ſomme de deux quarrez que ſon primitif; la raiſon montre aſſez que 45, par éxemple, dont les parties premieres & analogiques ſont 5 & 9, ne peut pas avoir plus de compoſitions que ſon primitif 5, car puiſque de ſes deux parties 5 & 9, l'une ſçavoir 5 eſt la ſomme de deux quarrez, & l'autre qui eſt 9 ne l'eſt point, il eſt certain que ledit 9 ne luy pourra communiquer ce qu'il n'a point; mais ſeulement parce qu'il eſt quarré, il n'empeſchera point que la propriété de 5 ne paſſe en 45, puiſqu'un quarré multipliant un quarré fait un quarré, & auſſi 9 multipliant 4 & 1 dont la ſomme eſt 5, donnera les deux autres quarrez 36 & 9 dont la ſomme ſera 45, mais il ne luy pourra pas ajouſter de nouvelle compoſition, ni le faire eſtre ſomme de deux autres quarrez que des multiples par 9, de ceux dont 5 eſt la ſomme.

Reſte donc que le nombre qui eſt pluſieurs fois la ſomme de deux

deux quarrez, soit composé de seuls nombres premiers pairement pairs+1, ou au moins qu'il soit multiple d'un nombre composé desdits nombres premiers seulement.

Mais pour éxaminer les différens nombres composez, il faut commencer par les plus simples, sçavoir par ceux qui ne se mesurent que par un seul nombre premier, comme sont les puissances dont la racine est un nombre premier pairement pair+1.

Je trouve que 25 quarré de 5, n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrez.

125 cube de 5 est deux fois la somme de deux quarrez.

625 qq. de 5. l'est aussi deux fois.

Il sera facile de voir combien de fois chacun de ces petits nombres est la somme de deux quarrez, en ostant les quarrez moindres, comme on voit au quatriéme éxemple.

Or on voit que chacun desdits nombres qui sont puissances d'un nombre premier, n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux; de sorte qu'il ne reste plus qu'à voir combien de fois il est la somme de deux quarrez composez entr'eux, c'est-à-dire, qui ont une commune mesure, ce qui se fera aisément comme il s'ensuit.

Il faut voir combien de fois le nombre se peut diviser en deux parties, dont l'une soit un quarré, & compter combien de fois chacune des sommes rélatives est la somme de deux quarrez premiers entr'eux, car autant de fois le nombre donné est la somme de deux quarrez multiples, & qui ont l'autre partie rélative, qui est un quarré pour commune mesure.

Par là on voit qu'un quarré, dont la racine est un nombre premier, n'est qu'une fois la somme de deux quarrez, non plus que sa racine. Que le cube & le qq. sont chacun deux fois la somme de deux quarrez.

Que la cinquiéme & sixiéme puissance sont chacune trois fois la somme de deux quarrez, & ainsi continuant.

D'où il sera facile de faire une regle pour trouver combien de

fois chaque puiſſance, dont la racine eſt un nombre premier, eſt la ſomme de deux quarrez; ſçavoir, en prenant les expoſans deſdites puiſſances, & conſiderant de quelle façon on tirera 1 des expoſans 1 & 2, & comment on aura 2 par 3 & 4, &c. Car on voit que ſi on prend la moitié de l'expoſant lorſqu'il eſt pair, ou le milieu lorſqu'il eſt impair, on aura ce qu'on cherche.

Il faut maintenant voir ce qui appartient aux nombres qui ſont meſurez par pluſieurs nombres premiers, qui ſurpaſſent de l'unité un multiple de 4.

Je trouve dans la table 65 & 85, dont le premier a 5 & 13 pour parties, & le ſecond 5 & 17, & chacun deſdits nombres eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux. Pour des quarrez multiples il n'y en a point, parce qu'aucun deſdits nombres n'a de quarré pour partie.

On trouvera auſſi que ſi le nombre donné a pour parties trois nombres premiers comme 1105, qui eſt produit par 5, 13, 17, il ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, comme on a veu au quatriéme éxemple, & il ne peut eſtre la ſomme de deux quarrez multiples, parce qu'il n'a point de partie quarrée. On verra audit quatriéme éxemple combien de fois chaque nombre eſt la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, car ils le ſont autant de fois qu'ils ſont hypotenuſes primitives, comme il a eſté dit.

Mais ſi le nombre donné peut eſtre meſuré par quelque quarré, il ſera la ſomme de quarrez multiples autant de fois que la partie rélative eſt la ſomme de deux quarrez primitifs. Et pour avoir une regle par laquelle je puiſſe trouver la multitude des couples de quarrez, ſans avoir la peine de les déchifrer tous par la conſideration de toutes les parties quarrées; je chercheray, par ce qui a eſté dit, la multitude des couples de quarrez de pluſieurs nombres, & aprés en avoir quelques-uns, je verray quelle regle on pourra donner qui leur convienne à tous; & afin d'éviter la difficulté

culté de cette recherche, je choisiray les moindres nombres, sçavoir ceux qui ne sont mesurez que par deux nombres premiers.

Ainsi je trouve qu'un nombre composé de deux nombres premiers, comme 65, dont les parties sont 5 & 13, est deux fois seulement la somme de deux quarrez.

Si les parties du nombre sont un quarré & une racine, il sera trois fois la somme de deux quarrez, car il aura deux primitifs & un multiple.

Si les parties sont un cube & une racine, il sera quatre fois la somme de deux quarrez.

Si les parties sont un quarré quarré & une racine, il sera cinq fois.

Si les parties sont deux quarrez, il sera quatre fois la somme de deux quarrez

Si c'est un quarré & un cube, il sera six fois, &c.

Je voy icy que la grandeur des parties ne fait rien à la multitude des couples de quarrez; par éxemple, 17 ou son quarré 289, pour estre plus grand que 5 ou son quarré 25, n'est pas pour cela plus de fois la somme de deux quarrez; mais l'augmentation des puissances augmente cette multitude: ainsi une cinquiéme puissance donne trois couples, & un quarré n'en a qu'une.

Il faudra donc considerer seulement lesdites puissances, lesquelles seront commodément representées par leurs exposans.

Je feray donc une petite table des parties de quelques nombres, ausquelles on mettra les exposans desdites parties au lieu d'icelles parties, comme on voit icy.

1. 1	2.
1. 2	3.
1. 3	4.
1. 4	5.
1. 5	6.

Car par éxemple, 1, 2 signifient que les parties du nombre sont une racine, ou nombre premier, & un quarré; & ensuite on met 3 séparé d'une ligne, qui montre que le nombre dont les parties sont un quarré, & un nombre premier, est trois fois la somme de deux quarrez.

Or voicy comme on trouvera ladite multitude de cou-

couples de quarrez. Par exemple; on veut ſçavoir combien de fois un nombre, dont les parties ſont un quarré & une cinquiéme puiſſance, eſt la ſomme de deux quarrez.

Premierement parce qu'il ſe meſure par deux nombres premiers, je conclus qu'il eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux.

Reſte donc à trouver les couples des quarrez multiples.

2.	2	4.
2.	3	6.
2.	4	7.
2.	5	9.
2.	6	10.
3.	3	8.
3.	4	10.
3.	5	12.
3.	6	14.

Pour les trouver je diviſe le nombre en deux parties rélatives, l'une deſquelles ſoit un quarré, & ce en toutes les façons poſſibles.

Pour le faire avec plus de facilité, je nommeray les parties, que l'une ſoit A. q. & l'autre B. cinquiéme puiſſance.

Je prendray donc A. q. pour une des parties rélatives; l'autre partie ſera B. cinquiéme puiſſance, laquelle n'eſt qu'une fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux, comme il a eſté dit, je marque donc 1 enſuite. Puis je prens B. q. pour une des parties: la rélative ſera A. q. par B. cube, qui eſt deux fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux: je marque donc 2 enſuite.

A. q. --- B. 5me puiſſ.	1.
B. q. --- A. q. par B. cub.	2.
B. qq. -- A. q. par B.	2.
B. q. par A. q. --- B. cub.	1.
B. qq. par A. q. --- B.	1.
Somme	7.

Et ainſi continuant à prendre les parties quarrées, comme on voit icy, on aura les primitifs de la partie rélative, qui donneront autant de multiples au nombre total, puiſque les quarrez primitifs appartenans à la ſeconde partie, ſont tous deux multipliez par la premiere partie qui eſt un quarré.

On aura donc 7 multiples, qui eſtant joints aux deux primitifs, qui ſont particulierement affectez au nombre total, font en tout 9 couples de quarrez dont la ſomme eſt ledit nombre qui a pour parties un quarré & une cinquiéme puiſſance.

Il

Il faut donc de la multitude des couples de plusieurs nombres, inférer quelque regle pour trouver ladite multitude.

Or je ne trouve point de regle par laquelle je puisse trouver à tous la multitude des quarrez par l'inspection des exposans des puissances desdites parties.

Aussi lesdits exposans n'expriment pas ladite multitude de couples de quarrez, comme ils faisoient aux hypotenuses pour en exprimer la multitude. Car, par éxemple, une cinquiéme puissance est bien cinq fois hypotenuse, mais elle n'est que trois fois la somme de deux quarrez; & une sixiéme puissance qui est six fois hypotenuse, n'est aussi que trois fois la somme de deux quarrez.

On mettra donc la multitude desdites couples de quarrez ensuite des exposans, comme on voit icy, pour s'en servir au lieu desdits exposans.

Exposans.		
1. 1	1. 1	2.
1. 2	1. 1'	3.
1. 3	1. 2	4.
1. 4	1. 2	5.
1. 5	1. 3'	6.
2. 2	1'. 1	4.
2. 3	1'. 2	6.
2. 4	1'. 2	7.
2. 5	1'. 3	9.
2. 6	1'. 3'	10.
3. 3	2. 2	8.
3. 4	2. 2'	10.
3. 5	2. 3	12.
3. 6	2. 3	14.

Mais parce que les puissances dont l'exposant est pair, n'ont pas une plus grande multitude de couples de quarrez que la précédente puissance dont l'exposant est impair; il semble qu'il est à propos de ne pas obmettre cette condition, & partant je marque d'un accent le nombre de multitude appartenant aux puissances paires.

Ainsi ensuite des exposans 1, 2, je mets les nombres de multitude 1, 1'; & apres les exposans 2, 4, je mets 1', 2', & je me serviray desdits nombres de multitude 1, 1', pour trouver 3 qui est ensuite; & de 1', 2', pour trouver 7 qui est aprés.

Mais parce que je voy que les mesmes nombres de multitude qui appartiennent aux exposans ne donnent pas le mesme nombre de multitude pour le nombre donné, & que ceux qui sont marquez, sçavoir ceux dont l'exposant est pair, donnent un plus grand nombre que ceux dont l'exposant est impair; il est

 mani-

manifeſte qu'il faut avoir égard à la qualité des expoſans, ce qui conſiſte à voir s'il eſt pair ou impair; car, par exemple, 1, 2, provenans de 1 & 3 donnent 4; mais les meſmes 1, 2′, provenans de 1, 4, donnent 5; & ſi les meſmes 1′, 2, viennent de 2, 3, ils donneront 6; & venant de 2, 4, ils donneront 7.

Expoſans.		
1. 1	1. 1	2.
1. 2	1. 1′	3.
1. 3	1. 2	4.
1. 4	1. 2′	5.
1. 5	1. 3	6.
2. 2	1′. 1′	4.
2. 3	1′. 2	6.
2. 4	1′. 2′	7.
2. 5	1′. 3	9.
2. 6	1′. 3′	10.
3. 3	2. 2	8.
3. 4	2. 2′	10.
3. 5	2. 3	12.
3. 6	2. 3′	14.

De là on voit manifeſtement qu'on ne peut donner une meſme regle générale, puiſque les meſmes nombres 1, 2, donnent quatre nombres différens; mais il faudra diſtinguer ſi les expoſans dont leſdits 1, 2, ou autres nombres, ſont dérivez, ſont pairs ou impairs.

Cette diverſité ſe peut conſiderer en trois façons: car ou les deux expoſans ſont tous deux impairs, ou ils ſont tous deux pairs, ou l'un eſt pair & l'autre impair.

Je chercheray donc ſéparément des regles pour chacune de ces trois façons.

Et premierement quand les expoſans ſont tous deux impairs. Le premier exemple de la table eſt quand les expoſans des parties du nombre donné ſont 1, 1, les nombres de multitude qui leur appartiennent ſont auſſi 1, 1; je regarde comment je feray 2 avec 1, 1, & je voy que ſi on prend la ſomme deſdits 1 & 1 on aura 2.

Je prens un autre exemple, ſçavoir le troiſiéme où les expoſans ſont 1, 3, & leur nombre de multitude ſont 1, 2: or la ſomme de 1, 2, n'eſt pas 4 ainſi qu'il ſeroit requis, & partant ce n'eſt pas là la regle.

Je chercheray donc 2 avec 1 & 1 d'une autre ſorte, & je trouve que le double du produit de 1 par 1 eſt 2.

Et conſiderant les autres exemples où les deux expoſans ſont tous

tous deux impairs, je trouve les nombres qui appartiennent à chacun d'iceux en la mesme sorte; car le double du produit de 1, 2, qui appartiennent à 1, 3, est 4, & ainsi des autres; d'où je conclus que la regle est bonne.

Je passe aux exposans qui sont tous deux pairs. Le premier éxemple est celuy dont les exposans sont 2 & 2, leurs nombres sont 1′, 1′, (sçavoir la moitié d'iceux, & aux exposans impairs le milieu,) je cherche le moyen de faire 4 avec 1 & 1.

Pour suivre le plus que je pourray la premiere méthode, il faudra que je prenne le produit de 1 par 1, lequel est 1 dont le quadruple sera 4. Mais il n'en ira pas de mesme aux exposans 2 & 4, car les nombres qui leur appartiennent, sçavoir 1′ & 2′, donneroient 8, & non pas 7, ainsi qu'il est requis.

J'éssayeray donc à faire 4 par le moyen des mesmes 1′ & 1′ du premier éxemple d'une autre façon, en suivant encore plus que faire se pourra la premiere méthode.

On prendra donc encore le produit de 1 par 1, lequel est 1; son double est 2, auquel joignant les mesmes 1 & 1, on aura 4, ainsi qu'il est requis.

Je prens ensuitte les exposans 2 & 4: les nombres qui leur appartiennent, sçavoir leur moitié, est 1 & 2, leur produit est 2 dont le double est 4, auquel joignant les mesmes 1 & 2, on aura 7, qui est le nombre qu'il falloit avoir.

J'éprouve la mesme chose aux exposans 2 & 6, & trouve 10, d'où je conclus que la regle est bonne.

Je passe par-aprés à la troisiéme distinction, sçavoir quand l'un des exposans est pair, & l'autre impair. Le premier éxemple est quand les exposans sont 1 & 2, leur milieu & moitié sont 1 & 1′, avec lesquels il faut trouver 3. Je prens comme auparavant le produit de 1 par 1, qui est 1, son double est 2.

Or puisque les deux exposans estant impairs on prend simplement le double du produit sans rien ajouster, & lorsque lesdits exposans sont tous deux pairs on ajouste au double du produit les

 deux

deux nombres qui ſe ſont multipliez il ſe pourra faire que quand l'ün des expoſans eſt pair & l'autre impair, il faudra ſeulement ajouſter un des nombres au double du produit ſuſdit.

Partant audit produit 2 j'ajouſte l'un des nombres, ſçavoir 1 pour avoir 3.

Mais parce que chacun des nombres qui ſe ſont multipliez eſt 1, je ne puis encore ſçavoir ſi c'eſt celuy qui vient de l'expoſant pair, ou celuy qui vient de l'impair.

Je prens donc un autre éxemple, ſçavoir le ſuivant auquel les expoſans ſont 1 & 4. Les nombres qui en dépendent ſont 1, 2, le double de leur produit eſt 4; mais parce qu'il faut avoir 5, on ajouſtera 1 audit 4: or cet 1 eſt le nombre qui provient de l'expoſant impair; je diray donc qu'au double du produit il faut ajouſter le milieu de l'expoſant impair.

Je regarde aux autres éxemples ſi la meſme choſe arrivera comme à ceux dont les expoſans ſont 1, 6,] 2, 3,] 2, 5, &c. & je trouve que cette regle convient à tous, d'où je conclus qu'elle eſt bonne.

Il faut maintenant voir quand le nombre donné ſera meſuré par trois nombres premiers différens; par éxemple, ſi ſes parties ſont un nombre premier, un quarré & un cube, leſquelles ſoient A. B. q. & C. cub.

Je les mets en deux parties rélatives, en telle ſorte que l'une ſoit un quarré, & je prens les primitifs de la partie rélative au quarré que je mets enſuite. Par éxemple, prenant C. q. pour une des parties, la rélative ſera A. par C. par B. q. laquelle contenant trois ſortes de nombres premiers, elle ſera quatre fois la ſomme de deux quarrez premiers entr'eux; je mets donc 4 enſuite, & ainſi des autres.

B. q. --- A. par C. cub.	2.
C. q. --- A. par C. par B. q.	4.
B. q. par C. q. --- A. par C.	2.

Et aſſemblant tous leſdits primitifs des parties qui ſeront multiples au nombre total, je trouve huit multiples, auſquels joignant les quatre primitifs dudit nombre total, on aura en tout douze

douze couples de quarrez, desquels le nombre donné est la somme.

Il faut donc trouver 12 par le moyen des exposans 1, 2, 3, ou des nombres qui leur appartiennent 1, 1', 2.

Et premierement de 1 & 1' j'ay 3. Je prendray donc 3 au lieu de 1, 1', & ainsi j'auray 3 & 2; leur produit est 6 dont le double est 12, qui est la multitude requise des couples de quarrez.

On pourroit icy trouver quelque difficulté sur le 3 qui provient de 1 & 1', sçavoir, s'il doit estre pris comme venant d'un exposant pair ou d'un impair, puisqu'il provient de tous les deux ensemble; mais la regle nous montre que l'impair prévaut icy, car autrement il faudroit ajouster un des nombres au double du produit 12.

Mais icy il faut considerer que l'exposant pair montre que l'exposé est quarré, & l'exposant impair montre que l'exposé n'est pas quarré : si donc le nombre de multitude est celuy qui provient de plusieurs exposans, ou qui est la moitié, ou milieu d'un desdits exposans, ce nombre de multitude appartient à un nombre quarré, & il doit estre réputé provenir d'un pair: mais si ledit nombre de multitude appartient à un nombre non quarré, il doit estre réputé comme provenant d'un impair. Si donc entre les parties analogiques d'un nombre, il s'en trouve une qui ne soit point quarrée, le nombre ne sera point quarré, & les parties non quarrées auront leurs exposans impairs.

D'où il s'ensuit qu'entre plusieurs exposans, s'il y en a quelqu'un qui soit impair, le nombre qui est produit par les parties à qui appartiennent lesdits exposans, suit la loy des exposans impairs.

Ainsi en nostre exemple, ayant premierement travaillé sur les exposans 1 & 2, qui donnent 3 pour le nombre de la multitude, ledit 3 doit estre réputé comme provenant d'un exposant impair, parce qu'entre les exposans dont il provient il y en a un impair, ce qui fait que le nombre qui est trois fois la somme de deux quar-

 rez

rez n'eſt pas quarré, & partant ſon expoſant doit eſtre réputé impair.

On trouvera le meſme nombre 12 en meſlant autrement leſdits expoſans. Comme ſi je multiplie à part les nombres 1, 2, provenans des expoſans 1 & 3, j'auray 4. L'autre expoſant eſt 2, ſon nombre eſt 1′, je multiplie donc 1′ par 4, le produit eſt 4, dont le double eſt 8, auquel il faut adjouſter le nombre qui provient de l'expoſant impair, ſçavoir 4, puiſque l'autre nombre 1′ provient d'un expoſant pair, & on aura 12 comme cy-devant.

SIXIÉME EXEMPLE.

TROUVER tous les triangles qui ont un nombre donné pour différence de leurs moindres coſtez.

Afin de trouver tout ce qui dépend de la connoiſſance des nombres qui ſervent de différence aux coſtez des triangles, je fais pluſieurs triangles primitifs de ſuite, & je prens leur différence, en laiſſant les multiples, parce qu'ils ne peuvent rien avoir qui ne vienne des primitifs.

On voit icy tous les triangles primitifs dont les hypotenuſes ſont moindres que 100, & aprés eux eſt la différence de leurs moindres coſtez.

3.	4.	5	1.
5.	12.	13	7.
8.	15.	17	7.
7.	24.	25	17.
20.	21.	29	1.
12.	35.	37	23.
9.	40.	41	31.
28.	45.	53	17.
11.	60.	61	49.
16.	63.	65	47.
33.	56.	65	23.
48.	55.	73	7.
13.	84.	85	71.
36.	77.	85	41.
39.	80.	89	41.
65.	72.	97	7.

Or pour remarquer ce qu'il y a de particulier dans leſdits nombres qui ſervent de différence, je trouve qu'ils ſont premiers, ou compoſez de nombres que je trouve auſſi dans la table, comme 49 qui eſt le quarré de 7; de plus ces nombres premiers (ſi on excepte 1) ſont tous différens de l'unité d'un multiple de 8, & je ne trouve aucun nombre dans ladite table qui n'ait cette condition.

Maintenant il faut voir comment on pourra trouver tous les triangles, la différence des moindres coſtez eſtant donnée.

Je

Je prendray par éxemple 7, & par son moyen je chercheray une regle pour trouver les triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17. Mais parce que 7 est nombre premier & qu'il sert de différence à plusieurs triangles, il faut de nécessité qu'il ait quelqu'autre propriété par laquelle on puisse trouver lesdits triangles, autrement ils ne se pourroient pas trouver; car quoy-que je sçache que 7 est différent de l'unité d'un multiple de 8, cela ne me donne autre chose, sinon que 7 est proche du premier octonaire, ce qui ne pourra pas suffire pour trouver les deux triangles susdits, & les autres qui sont encore ensuite.

Or en considerant 7, je voy qu'il est la différence entre 1 & 8, & entre 2 & 9, sçavoir entre un quarré & un double quarré. Je regarderay donc si les autres nombres qui servent de différence entre les moindres costez d'un triangle sont aussi la différence d'un quarré & d'un double quarré.

Et sans éxaminer 1 qui sert de différence entre 1, 2, & 8, 9, & autres, je viens à 17 qui sert de différence entre 1 & 18, & entre 8 & 25; de mesme 23 sert de différence entre 2 & 25, & entre 9 & 32, & chacune desdites couples contient un quarré & un double quarré.

De plus, je remarque qu'à chacune de ces couples il y a un des nombres moindre que la différence d'entr'eux; ainsi à la couple 9, 32, le moindre nombre 9 est moindre que 23 qui en est la différence.

Je verray donc si par cette propriété je trouveray que 7 est la différence entre les moindres costez des deux triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17.

Voicy comme il s'y faut prendre.

7 sert de différence entre 1 & 8, & entre 2 & 9. Je prens leurs racines qui sont 1, 2″, & 1″, 3. Je marque les racines de doubles quarrez, afin de les connoistre d'avec celles des quarrez, car on voit bien qu'il faut comparer la racine du double quarré avec le nombre dont elle provient, d'une autre maniere que celle du

du quarré ſimple, & qu'elles doivent produire un effet différent l'une de l'autre.

Je mets donc 7, & enſuite les racines des deux couples ſuſdites comme on voit icy; ſçavoir 1, 2", & 1", 3.

7	1. 2"	2. 3.
	1". 3	1. 4.

Je conſidere par aprés les deux triangles qu'il faut trouver, ſçavoir 5, 12, 13, & 8, 15, 17, je prens les quarrez dont ils proviennent, qui ſont 4, 9; & 1, 16.

Leurs racines ſont 2 & 3,] & 1, 4, que j'écris auſſi enſuite.

Car il faut remarquer que d'ordinaire la ſolution ſe trouve plus aiſément par le moyen des racines que par les quarrez, de ſorte que quand on aura des quarrez, ſi on ne trouve pas aiſément par leur moyen ce qu'on cherche, on l'éxaminera par les racines, ce qui ſert auſſi à rendre la recherche plus facile par la ſeptiéme régle, ſçavoir, en ſe ſervant de moindres nombres.

Il faut donc par le moyen de 1, 2", & 1', 3, trouver 2, 3. 1, 4, ſçavoir par les racines des quarrez & doubles quarrez dont 7 eſt la différence, trouver les racines des quarrez qui ſont les triangles qui ont 7 de différence entre leurs moindres coſtez.

Je voy que 1", 2", ſont les racines des moindres quarrez deſdits triangles, & les deux grandes 3 & 4, ſe pourront trouver prenant en croix la ſomme de 1', 2", & de 1, 3.

On pourroit dire auſſi que la ſomme & la différence de 1' & 3', donnent 2 & 4, qui ſont les racines des quarrez pairs des triangles; & la ſomme & la différence de 1", 2", donnent 1 & 3, qui ſont les racines des quarrez impairs.

7	1'. 2'	2. 3.
	1'. 3'	1. 4.

Mais on pourroit encore ſe ſervir d'une ſeule couple pour un triangle; ſçavoir ſi on prend la racine du double quarré pour une des racines, & la ſomme des deux pour l'autre.

Ainſi à la premiere couple 1', 2",] 2 ſera une des racines requiſes, & 3 qui eſt la ſomme de 1 & 2 ſera l'autre.

Et à l'autre couple 1", 3',] 1 ſera l'une des racines, & la ſomme de 1, 3, ſçavoir 4, ſera l'autre.

Et

Et cette derniere façon si elle est bonne, comme il y a quelque apparence, sera plus commode, puisque chaque couple donne un triangle.

Ce qui me fait présumer qu'elle est bonne, est que les autres ne peuvent pas servir pour les triangles qui ont 1 de différence entre leur costez ; car 1 est la différence entre le quarré & double quarré 1, 2, le moindre desquels, sçavoir 1, n'est pas plus grand que ladite différence 1.

Voicy donc comme je l'examineray à 1.

Les racines du quarré & double quarré susdit sont 1′ & 1″, donc 1 sera une des racines, (sçavoir, prenant la racine du double quarré) & 2 qui est la somme des deux racines 1′ & 1″ sera l'autre racine ; on aura donc 1, 2, dont les quarrez 1, 4, donnent le triangle 3, 4, 5, qui a 1 de différence entre ses moindres costez.

Le mesme 1 est encore la différence entre le quarré, & le double quarré 8 & 9, dont les racines sont 2″, 3′.

On aura donc pour les racines des quarrez 2 & 5, sçavoir, la racine du double quarré, & la somme des deux.

Lesdits 2 & 5 donneront le triangle 20, 21, 29, qui a 1 de différence entre ses moindres costez.

Il faut maintenant examiner les deux premieres regles sur 17. Les quarrez & doubles quarrez dont il est la différence sont 1, 18, & 8, 25. Leurs racines sont 1′, 3″, & 2″, 5′.

Je les dispose comme auparavant.

17	1′. 3″	3. 5.
	2″. 5′	2. 6.

Par la premiere regle, je prendray 3 & 2 pour les racines des moindres quarrez requis, & les sommes de 2″, 3″, & de 1′, 5′, pour les autres, mais on ne pourra pas faire par ce moyen les triangles requis, car on auroit les quarrez de 3 & 5, & de 2, 6, qui donneroient des triangles ausquels les trois costez seroient pairs, & partant la différence qui seroit paire ne seroit pas 17.

Que si on vouloit accoupler autrement 5 & 6, & qu'on prist 2, 5, & 3, 6, on n'auroit pas aussi le triangle requis, car les

quarrez de 3 & 6 estant multiples de 3, donneroient un triangle auquel tous les costez seroient mesurez par 3, & partant la différence des costez ne pourroit pas estre 17, puisqu'elle-mesme seroit aussi mesurée par 3, & partant la premiere façon de trouver les triangles n'est pas bonne. Venons à la seconde.

17	1'. 3''	4. 5.
	2''. 5'	1. 6.

La somme & la différence de 1', 5', sont les racines des quarrez pairs, & la somme & la différence de 2'', 3'', sont les racines des quarrez impairs: mais cette regle ne réussit pas non plus que la premiere, quoy-qu'elle ait plus d'apparence d'estre bonne, car par la premiere, aprés qu'on a pris 2'', 3'', pour les racines des moindres quarrez, on prend par aprés les sommes de 2'', 3'', & de 1', 5', pour les racines des deux autres quarrez; d'avoir pris 2'' pour un triangle, & 3'' pour l'autre, cela va bien, parce qu'il y a de la ressemblance entre 2'' & 3'': mais de prendre par aprés la somme de 2'', 3'', pour un des triangles, & celle de 1', 5' pour l'autre, ce sont des façons différentes, parce que 2'', 3'', sont racines de doubles quarrez, & 1', 5', de quarrez simples.

La seconde façon n'a pas cette répugnance, les racines de chaque triangle estant égales à la somme & à la différence de 1', 5', & de 2'', 3''; néanmoins parce que l'on prend pour le premier la différence des racines des quarrez simples & la somme de celles des doubles quarrez, & le contraire pour le second triangle; cette diversité fait qu'elle ne réussit pas.

La troisiéme voye est plus réguliere, & les triangles se trouvent par des façons entierement semblables, aussi est-ce la vraye méthode de trouver les triangles.

17	1'. 3''	3. 4.
	2''. 5'	2. 7.

On se sert de chaque couple à part, prenant la racine du double quarré pour la moindre racine, & la somme des deux quarrez pour l'autre.

Ainsi 3 est la racine du moindre quarré d'un des triangles, & 4 qui est la somme de 3'' & 1', est l'autre racine.

Les deux racines sont donc 3 & 4, qui donnent le triangle 7,

24, 25, qui a 17, pour difference de ſes coſtez.

L'autre triangle ſe trouvera de la meſme maniere, ſçavoir, prenant la racine du double quarré 2 pour celle du moindre quarré, & la ſomme de 2'' & 5 ſçavoir 7, pour racine de l'autre quarré. On aura donc 2 & 7 pour racines, qui donnent le triangle 28, 45, 53, qui a 17 de difference entre ſes coſtez.

La meſme choſe ſe fera aux autres nombres, car des couples de 23, ſçavoir de 3, 4'', & 1'', 5, on trouvera les triangles 33, 56, 65, & 12, 35, 37, qui ont 23 de difference entre leurs coſtez.

23	3. 4''	4. 7.
	1''. 5	1. 6.
31	1. 4''	4. 5.
	3''. 7	3. 10.

Et des couples de 31 on trouvera les triangles 9, 40, 41, & 60, 91, 109, qui ont 31 de difference, d'où l'on peut inferer que la regle eſt bonne.

Voilà donc le moyen de trouver les triangles qui ont un nombre donné pour difference de leurs coſtez, mais la queſtion demande tous leſdits triangles.

Il faut donc voir combien il y en doit avoir, & s'il y en a quelque nombre determiné; & pour cet effet j'ay recours à la table qu'on a faite en commençant d'examiner la queſtion, dans laquelle je voy qu'un meſme nombre ſert à pluſieurs triangles, car il y en a 4 qui ont 7 pour difference.

Je conſidere auſſi qu'il n'y a point de repugnance qu'un meſme nombre ſerve de difference aux moindres coſtez d'une infinité de triangles, veû meſme qu'il y en a une infinité qui n'ont que 1 de difference entre le grand coſté & l'hypotenuſe, & je conclus qu'il ſe pourroit bien faire auſſi qu'il y auroit une infinité de triangles qui auroient un meſme nombre pour difference de leurs moindres coſtez.

Et ce qui me confirme en cette opinion eſt que je voy quatre triangles qui ont un nombre premier, ſçavoir 7 pour difference. Or les nombres premiers ne ſont pas ſi abondans, lorſque la choſe eſt limitée; comme on voit que les meſmes nombres ſont auſſi la

somme des susdits costez des triangles : mais parce que cela est limité, & qu'il est impossible qu'ils soient la somme des costez d'une infinité de triangles, on voit que les nombres premiers comme 7, 17, &c. ne sont chacun la somme des costez que d'un seul triangle.

Or si chaque nombre sert de différence entre les moindres costez d'une infinité de triangles, il est nécessaire qu'il y ait quelque progression qui conduise à cette infinité de triangles ; & s'il y a une progression, & qu'on sçache les deux moindres termes, & la différence des nombres de ladite progression, on la pourra poursuivre aussi loin qu'on voudra.

Je cherche donc dans ma table deux triangles qui ayent une mesme différence entre leurs moindres costez, & je prens les triangles les plus proches. Ainsi 5, 12, 13, & 8, 15, 17, ont tous deux 7 de différence entre leurs costez.

Il faudroit voir si on pourroit avec le moindre faire le plus grand : mais parce que les racines des quarrez qui font le triangle sont plus simples que les costez du mesme triangle, je prens lesdites racines qui sont 2, 3, & 1, 4 ; mais on ne peut pas trouver une suite qui avec 2, 3, donne 1, 4, ou avec 1, 4, donne 2, 3, & qui continuë à l'infini en augmentant : car si on prend 2, 3, pour le premier terme, & qu'on trouve 1 au second, cela iroit en diminuant ; de mesme qui prendroit 1, 4, pour le premier, le second auroit 3 pour sa plus grande racine qui seroit moindre que la plus grande du précédent, & ainsi on iroit encore en diminuant.

Il faut donc afin que la progression aille en augmentant, que chacun des termes augmente, ou au moins que le grand terme augmente, & que le moindre ne diminuë point.

Je conclus de là que les deux triangles susdits sont chacun le commencement de quelque progression.

Il faut donc prendre dans la table quelqu'autre triangle plus grand qui ait pareil nombre de 7, pour différence entre ses moindres costez. Je trouve 48, 55, 73.

Les

Les racines des quarrez dont il provient, ſont 3 & 8.

Mais parce qu'on ne voit pas d'où peut provenir ce 3 & 8, ſçavoir ſi c'eſt de 2, 3, ou de 1, 4, je choiſiray pluſtoſt dans la table une autre différence pour l'éxaminer, puiſque j'y voy deux triangles aſſez éloignez l'un de l'autre, qui ont chacun l'unité pour différence entre leurs coſtez.

Joint auſſi que pour plus grande facilité la méthode requiert qu'on ſe ſerve du moindre nombre poſſible en l'éxamen. Mais (pour retourner à noſtre 7) ſi on vouloit juger duquel des deux triangles dépend 48, 55, 73 ſçavoir, ſi c'eſt de 5, 12, 13, ou de 8, 15, 17, il faudroit voir ſi c'eſt le premier qu'on rencontre aprés les deux ſuſdits, & s'il n'y en a point dont les coſtez ſoient moindres, & parce que je trouve que c'eſt le moindre aprés les deux ſuſdits, je concluray qu'il provient du moindre des deux premiers, ſçavoir, de 5, 12, 13, qui eſt moindre que 8, 15, 17.

Je trouve donc 3, 4, 5, qui a 1 de différence, & enſuite 20, 21, 29. Les racines de leurs quarrez ſont 1, 2, & 2, 5.

Je les diſpoſe comme on voit icy, & je regarde comment je pourray de 1, 2, tirer 2, 5. Et premierement je voy que le moindre nombre de la ſeconde couple eſt égal au plus grand de la premiere, car chacun d'iceux eſt 2.

1.	2.
2.	5.
5.	12.

Reſte donc à faire 5 avec 2, & 1. Le 5 eſt la ſomme des trois nombres que j'ay déja, ſçavoir de 2, 2, & 1, ou (ce qui eſt la meſme choſe) il eſt la ſomme du moindre nombre 1, & du double de 2 qui eſt le plus grand.

Je continuë par aprés cette progreſſion de la meſme ſorte, prenant le plus grand nombre 5 pour le moindre de la couple ſuivante, & pour avoir le plus grand j'ajouſte 2 au double de 5 pour avoir 12.

1.	2	3.	4.	5.
2.	5	20.	21.	29.
5.	12	119.	120.	169.
12.	29	696.	697.	985.

 J'ay

J'ay donc 5 & 12, dont les quarrez donnent le triangle 119, 120, 169, qui a 1 de différence entre ſes moindres coſtez.

De la meſme façon avec 5 & 12, on fera 12, 29, qui donneront le triangle 696, 697, 985.

J'appliqueray par aprés cette méthode aux autres nombres.

Et avec 2, 3, je feray

2.	3.	5.	12.	13.	1.	4.	8.	15.	17.
3.	8.	48.	55.	73.	4.	9.	65.	72.	97.
8.	19.	297.	304.	425.	9.	22.	396.	403.	565.

les racines 3 & 8, prenant 3 pour la moindre, & la ſomme de 2, & du double de 3 pour la plus grande, qui donneront le triangle 48, 55, 73.

Et avec 3 & 8, on fera 8 & 19, & ſon triangle 297, 304, 425.

Semblablement avec 1 & 4 on fera 4 & 9 & ſon triangle 65, 72, 97, & avec 4 & 9, on fera 9, 22, & ſon triangle 396, 403, 565.

Et ainſi à toutes ſortes de nombres, pourveu qu'on ſçache un des triangles, on trouvera les autres, mais il faut auſſi avoir égard aux multiples.

Or ces multiples ſont faciles à trouver quand on ſçait les primitifs, & ce qu'on doit icy remarquer eſt que tout nombre excepté 1, ſert de différence entre les moindres coſtez d'une infinité de triangles multiples, parce que tout nombre eſt multiple de 1, lequel 1 ſert de différence entre les moindres coſtez d'un triangle.

Ainſi 7 ſert de différence entre les coſtez des triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17, & de ceux qui en proviennent; mais outre cela parce que 7 eſt multiple de 1, il ſera encore la différence des coſtez des triangles multiples par 7, de 3, 4, 5, de 20, 21, 29, & de leur ſuite; ſçavoir de 21, 28, 35,] 140, 147, 203, & des autres.

Il en eſt de meſme des autres nombres, & s'ils eſtoient compoſez il y auroit beaucoup plus de multiples; au moins il y auroit plus de principes dont ils proviennent.

Il y a plusieurs autres choses à considerer sur ce sujet, dont on a parlé au discours des triangles, au chapitre qui traite de la somme & de la différence des deux moindres costez: mais cecy suffira pour faire découvrir le reste.

TROUVER UN TRIANGLE
auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres costez soit un quarré.

Voicy le triangle.

468729861028 9. hypotenuse.
456548602776 1. costé impair.
106165229352 0. costé pair.

C'est la question que l'exemple 7 suivant nous enseigne à chercher par tant de moyens.

TROUVER UN TRIANGLE
duquel l'aire ajoustée aux deux petits costez fasse un quarré.

Voicy le triangle.

205769.
190281.
78320.

TROUVER UN TRIANGLE
dont l'aire jointe à l'hypotenuse donne un quarré.

C'est 17, 144, 145.

TROUVER UN TRIANGLE
dont l'aire jointe au petit costé fasse un triangle.

C'est 3, 4, 5,] 16, 30, 34.
Et le troisiéme est 105, 208, 233.

Sub-

SEPTIÉME EXEMPLE.

TROUVER un triangle auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres costez soit un quarré.

Puisque la question requiert deux choses, sçavoir l'hypotenuse quarrée & la somme des deux costez aussi quarrée, je chercheray les moyens de faire chacun séparément, & je verray si l'un estant quarré, l'autre le peut estre aussi, suivant ce qui a esté dit au neuviéme précepte.

Je chercheray premierement tous les triangles qui ont un quarré pour la somme de leurs moindres costez.

Je suppose donc qu'on ait examiné quels nombres doivent estre la somme des deux moindres costez des triangles, & qu'on ait trouvé que ce sont des nombres premiers différens de l'unité d'un multiple de 8, ou qui sont composez desdits nombres premiers seulement.

Je prens donc les quarrez desdits nombres, sçavoir de 7, 17, 23, 31, &c. & je cherche leurs triangles pour voir si quelqu'un d'entreux aura un quarré pour son hypotenuse.

Pour avoir lesdits triangles il faut avoir les couples de quarrez & doubles quarrez, dont la différence est la somme des deux moindres costez du triangle. Et parce que tous les nombres dont on se doit servir sont quarrez, il faut voir si par le moyen de leurs racines, on ne pourra point trouver les couples de quarrez, & doubles quarrez qui leur appartiennent.

Pour trouver cela on se servira des méthodes ordinaires, prenant des nombres connus; par éxemple, je sçay que 7 est la différence de 1, 8, & de 2, 9, dont les racines sont 1, 2'', & 1'', 3. Je sçay aussi que son quarré 49 est la différence de 1, 50, & de 32, 81, dont les racines sont 1, 5'', & 4'', 9.

1. 2''	1. 5''
1''. 3	4''. 9

Il faut donc par le moyen de 1, 2'', & 1'', 3, trouver 1, 5'', & 4'', 9. On donneroit bien plusieurs moyens de passer de l'un à l'autre, mais ils

ils ne conviennent pas aux autres nombres. En voicy un qui convient à tous.

Je prens le produit des deux couples, ſçavoir de 1 par 2, & de 1 par 3, pour avoir 2 & 3. Leur ſomme eſt 5 qui eſt le coſté du double quarré, leur différence eſt 1 qui eſt le coſté du quarré de la meſme couple. On aura donc 1, 5″, pour une des couples.

L'autre ſe trouvera aiſément, ſçavoir, en prenant la différence de 1 & 5 pour coſté du double quarré de l'autre couple, & la ſomme des racines des doubles quarrez, ſçavoir, de 4″ & 5″ pour la racine du quarré de ladite ſeconde couple.

On aura donc ainſi les deux couples 1, 5″, & 4″, 9.

J'éprouve la meſme choſe aux autres nombres, comme 17, & 23, & je trouve que cela y revient.

Je fais donc une table aſſez grande de pluſieurs quarrez, qui ſont la ſomme des deux moindres coſtez d'un triangle, comme on peut voir cy-aprés; & afin de trouver commodément les couples de quarrez & doubles quarrez dont ils ſont la différence, je mets leurs racines auec leurs couples auſſi; comme prés de 49 je mets 7 avec ſes couples 1, 2′, & 1″, 3, afin qu'on puiſſe trouver plus facilement les couples de 49 par le moyen de celles de 7, car les racines eſtant moindres que leurs quarrez, leurs couples ſe trouveront auſſi plus facilement que celles des quarrez.

TABLE DES QVARREZ

qui ſont la ſomme des moindres coſtez des Triangles.

7.		49.		17.		289.		23.		529.	
1.	2″	1.	5″	1.	3″.	7.	13″	3.	4″	7.	17″
1″.	3	4″.	9	2″.	5	6″.	19	1″.	5.	10″.	27

31.	961.	113.	12769.	193.	37249.
1. 4''	17. 25''	7. 9''	41. 85''	7. 11''	17. 137''
3''. 7	8''. 33	2''. 11	44''. 129	4''. 15	120''. 257
41.	1681.	119.	14161.	199.	39601.
3. 5''	1. 29''	3. 8''	41. 89''	1. 10''	161. 181''
2''. 7	28''. 57	5''. 13	48''. 137	9''. 19	20''. 201
47.	2209.			217.	47089.
5. 6''	23. 37''	9. 10''	79. 101''	11. 13''	113. 173''
1''. 7	14''. 51	1''. 11	22''. 123	2''. 15	60''. 233
49.	2401.	127.	16129.		
1. 5''	31. 41''	1. 8''	97. 113''	5. 11''	47. 157''
4''. 9	10''. 51	7''. 15	16''. 129	6''. 17	110''. 267
71.	5041.	137.	18769.	223.	49729.
1. 6''	49. 61''	5. 9''	7. 97''	13. 14''	167. 197''
5''. 11	12''. 73	4''. 13	90''. 187	1''. 15	30''. 227
73.	5329.	151.	22801.	233.	54289.
5. 7''	17. 53''	7. 10''	31. 109''	3. 11''	119. 185''
2''. 9	36''. 89	3''. 13	78''. 187	8''. 19	66''. 251
79.	6241.	161.	25921.	239.	57121.
7. 8''	47. 65''	1. 9''	127. 145''	7. 12''	1. 169''
1''. 9	18''. 83	8''. 17	18''. 163	5''. 17	168''. 337
89.	7921.			241.	58081.
3. 7''	23. 65''	9. 11''	73. 125''	1. 11''	199. 221''
4''. 11	42''. 107	2''. 13	52''. 177	10''. 21	22''. 243
97.	9409.	167.	27889.	257.	66049.
1. 7''	71. 85''	11. 12''	119. 145''	9. 13''	49. 185''
6''. 13	14''. 99	1''. 13	26''. 171	4''. 17	136''. 321
103.	10609.	191.	36481.	263.	69169.
5. 8''	7. 73''	3. 10''	89. 149''	5. 12''	73. 193''
3''. 11	66''. 139	7''. 17	60''. 209	7''. 19	120''. 313

271. 11. 14" 3". 17	73441. 103. 205" 102".307	343. 13. 16" 3". 19	117649. 151. 265" 114".379	433. 17. 19" 2". 21	187489. 281. 365" 84". 449
281. 13. 15" 2". 17	78961. 161.229" 68". 297	353. 15. 17" 2". 19	124609. 217. 293" 76". 369	439. 19. 20" 1". 21	192721. 359.401" 42". 443
287. 1. 12 11".23	82369. 241. 265" 24". 289	359. 17. 18" 1". 19	128881. 287. 325" 38". 363	449. 1. 15" 14".29	201601. 391.421" 30". 451
15.16" 1". 17	223.257" 34". 291	367. 5. 14" 9". 23	134689. 137. 277" 140".417	457. 11.17 6". 23	208849. 49. 325" 276".601
289. 7. 13" 6". 19	83521. 23. 205" 182".387	383. 3. 14" 11".25	146689. 233.317" 84". 401	463. 7. 16 9'. 25	214369. 113.337" 224".561
311. 9. 14" 5". 19	96721. 31. 221" 190".411	391. 1. 14" 13".27	152881. 337. 365" 28". 393	479. 13.18" 5". 23	229441. 119.349" 230".579
313. 5. 13" 8". 21	97969. 103. 233" 130".363	11.16" 5". 21	71. 281' 210".491	487. 5. 16 11".27	237169. 217.377" 160".537
329. 3. 13" 10".23	108241. 191.269" 78". 347	401. 7. 15" 8". 23	160801. 79. 289 210".499	497. 15. 19" 4". 23	247009. 193.377" 184".561
11.15" 4". 19	89. 241" 152".393	409. 13.17" 4". 21	167281. 137.305 168".473	9. 17" 8".25	47. 353" 306".659
337. 1. 13" 12".25	113469. 287. 313" 26". 339	431. 9. 16" 7'. 23	185761. 17. 305" 288".593	503. 3. 16" 13".29	253009. 329.425" 96". 521

31. 1. 4″ 3″. 7	961. 17. 25″ 8″. 33	113. 7. 9″ 2″. 11	12769. 41. 85″ 44″. 129	193. 7. 11″ 4″. 15	37249. 17. 137″ 120″. 257
41. 3. 5″ 2″. 7	1681. 1. 29″ 28″. 57	119. 3. 8″ 5″. 13	14161. 41. 89″ 48″. 137	199. 1. 10″ 9″. 19	39601. 161. 181″ 20″. 201
47. 5. 6″ 1″. 7	2209. 23. 37″ 14″. 51	9. 10″ 1″. 11	79. 101″ 22″. 123	217. 11. 13″ 2″. 15	47089. 113. 173″ 60″. 233
49. 1. 5″ 4″. 9	2401. 31. 41″ 10″. 51	127. 1. 8″ 7″. 15	16129. 97. 113″ 16″. 129	5. 11″ 6″. 17	47. 157″ 110″. 267
71. 1. 6″ 5″. 11	5041. 49. 61″ 12″. 73	137. 5. 9″ 4″. 13	18769. 7. 97″ 90″. 187	223. 13. 14″ 1″. 15	49729. 167. 197″ 30″. 227
73. 5. 7″ 2″. 9	5329. 17. 53″ 36″. 89	151. 7. 10″ 3″. 13	22801. 31. 109″ 78″. 187	233. 3. 11″ 8″. 19	54289. 119. 185″ 66″. 251
79. 7. 8″ 1″. 9	6241. 47. 65″ 18″. 83	161. 1. 9″ 8″. 17	25921. 127. 145″ 18″. 163	239. 7. 12″ 5″. 17	57121. 1. 169″ 168″. 337
89. 3. 7″ 4″. 11	7921. 23. 65″ 42″. 107	9. 11″ 2″. 13	73. 125″ 52″. 177	241. 1. 11″ 10″. 21	58081. 199. 221″ 22″. 243
97. 1. 7″ 6″. 13	9409. 71. 85″ 14″. 99	167. 11. 12″ 1″. 13	27889. 119. 145″ 26″. 171	257. 9. 13″ 4″. 17	66049. 49. 185″ 136″. 321
103. 5. 8″ 3″. 11	10609. 7. 73″ 66″. 139	191. 3. 10″ 7″. 17	36481. 89. 149″ 60″. 209	263. 5. 12″ 7″. 19	69169. 73. 193″ 120″. 313

271.	73441.	343.	117649.	433.	187489.
11. 14"	103. 205"	13. 16"	151. 265"	17. 19"	281. 365"
3". 17	102". 307	3". 19	114". 379	2". 21	84". 449
281.	78961.	353.	124609.	439.	192721.
13. 15"	161. 229"	15. 17"	217. 293"	19. 20"	359. 401"
2". 17	68". 297	2". 19	76". 369	1". 21	42". 443
287.	82369.	359.	128881.	449.	201601.
1. 12	241. 265"	17. 18"	287. 325"	1. 15"	391. 421"
11". 23	24". 289	1". 19	38". 363	14". 29	30". 451
		367.	134689.	457.	208849.
15. 16"	223. 257"	5. 14"	137. 277"	11. 17	49. 325"
1". 17	34". 291	9". 23	140". 417	6". 23	276". 601
289.	83521.	383.	146689.	463.	214369.
7. 13"	23. 205"	3. 14"	233. 317"	7. 16	113. 337"
6". 19	182". 387	11". 25	84". 401	9". 25	224". 561
311.	96721.	391.	152881.	479.	229441.
9. 14"	31. 221"	1. 14"	337. 365"	13. 18"	119. 349"
5". 19	190". 411	13". 27	28". 393	5". 23	230". 579
313.	97969.			487.	237169.
5. 13"	103. 233"	11. 16"	71. 281"	5. 16	217. 377"
8". 21	130". 363	5". 21	210". 491	11". 27	160". 537
329.	108241.	401.	160801.	497.	247009.
3. 13"	191. 269"	7. 15"	79. 289	15. 19"	193. 377"
10". 23	78". 347	8". 23	210". 499	4". 23	184". 561
		409.	167281.		
11. 15"	89. 241"	13. 17"	137. 305	9. 17"	47. 353"
4". 19	152". 393	4". 21	168". 473	8". 25	306". 659
337.	113469.	431.	185761.	503.	253009.
1. 13"	287. 313"	9. 16"	17. 305"	3. 16"	329. 425"
12". 25	26". 339	7". 23	288". 593	13". 29	96". 521

Je voy par aprés comment on fera le triangle par le moyen desdites couples; par éxemple, 7 est la somme des costez du triangle 3, 4, 5, les racines des quarrez qui donnent ledit triangle sont 1 & 2, je cherche donc comment avec les couples susdites, sçavoir, avec 1, 2″, & 1″, 3, je feray 1 & 2.

Je trouve que les racines des doubles quarrez desdites couples sont les racines des quarrez du triangle; je prens par aprés un autre nombre, comme 17, dont les couples sont 1, 3″, & 2″, 5, & je trouve aussi que prenant 3 & 2 pour les racines des quarrez qui doivent composer le triangle, elles donneront 5, 12, 13, qui a 17 pour la somme de ses moindres costez.

Voyons maintenant ce qu'il faut pour faire que l'hypotenuse soit quarrée. Il est nécessaire que les deux quarrez dont elle est la somme soient les costez d'un triangle; car puisque le quarré de l'hypotenuse est la somme des quarrez des deux autres costez d'un triangle, les racines desdits quarrez qui sont la somme d'un quarré d'hypotenuse sont les costez d'un triangle.

Or les racines des doubles quarrez de chaque couple sont les racines des quarrez dont la somme doit estre une hypotenuse quarrée. Il s'ensuit donc que lesdites racines des doubles quarrez doivent estre les costez d'un triangle.

Il ne sera donc point besoin de former les triangles qui ont les quarrez susdits pour la somme de leurs moindres costez, puisqu'on n'a besoin d'autre chose que de voir si l'hypotenuse est quarrée. Et on connoistra si elle est quarrée en considerant les racines des doubles quarrez susdits, & voyant s'ils peuvent estre les deux costez d'un triangle.

On ne considere icy que les triangles primitifs, parce que les multiples se réduisent à un primitif; & parce que le primitif est moindre que son multiple, s'il y en a quelqu'un qui ait les qualitez requises, il se trouvera auparavant ledit multiple.

Pour voir si les racines des doubles quarrez (qui appartiennent aux quarrez susdits qui sont la somme des costez d'un triangle) sont

les

les costez d'un triangle, il faut considerer quelques propriétez des costéz des triangles suivant le sixiéme précepte.

1°. Le costé pair de tout triangle primitif doit estre pairement pair, & partant toutes les couples qui sont icy ausquelles il se trouve un impairement pair doivent estre excluës, comme on voit aux couples de 289, 529, 2209, 2401, &c.

2°. L'un des deux costez de chaque triangle doit estre mesuré par 3: or le plus grand des deux nombres susdits ne peut pas estre mesuré par 3, ni aussi estre pair, lorsque la somme des deux moindres costez est un quarré, car le costé impair estant la différence des deux quarrez, si le plus grand des deux est pair & le moindre impair, ce moindre sera pairement pair + 1, car tout quarré impair est pairement pair + 1, & partant estant osté du quarré pair il restera un pairement pair — 1, pour le costé impair. Et si on ajouste par aprés ce costé impair au costé pair qui est pairement pair, la somme sera un pairement pair — 1, & partant ne sera pas un quarré; par éxemple, le triangle qui sera fait par les quarrez de 5 & 12, ne pourra pas avoir un quarré pour la somme de ses costez, car le costé impair sera la différence de 25 & 144, quarrez de 5 & 12, & ce costé impair sera pairement pair — 1, sçavoir 119, puisque pour l'avoir il faut oster un pairement pair + 1, sçavoir 25 du pairement pair 144. Si donc on ajouste le pairement pair — 1, qui est 119, au costé pair du triangle, sçavoir, à 120 qui est pairement pair, la somme sera un pairement pair — 1, & partant ce ne sera pas un quarré.

On montrera de la mesme façon que si le plus grand des deux quarrez qui font le triangle est mesuré par 3, la somme des deux moindres costez ne sera point un quarré.

Que les racines desdits quarrez soient comme devant 5 & 12, pour avoir le costé impair on ostera 25 de 144; or 25 est multiple de 3 + 1, car tout quarré qui n'est point mesuré par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3.

Si donc on oste un multiple de 3 + 1 d'un multiple de 3, sça-

voir 25 de 144, reftera 119 qui fera ternaire — 1.

Le cofté impair fera donc ternaire — 1, lequel eftant ajoufté au cofté pair 120 qui néceffairement eft multiple de 3, la fomme defdits coftez fera multiple de 3 — 1, & partant ne fera point quarrée.

Puis donc que le plus grand des deux nombres fufdits, qui font racines des doubles quarrez, & qui doivent auffi eftre coftez de triangles, n'eft point mefuré par 3 ny par 4, il faudra de néceffité que le moindre des deux foit mefuré par 3 & 4, puifque les coftez des triangles doivent contenir 3 & 4. Le moindre doit donc eftre mefuré par 12.

Il faudra donc rejetter toutes les couples aufquelles la racine du moindre double quarré ne fe mefure pas par 12.

Et le premier qui n'eft point excepté par les deux regles précédentes eft 5041, quarré de 71, qui a 12 pour la racine du moindre de fes doubles quarrez.

3°. Le grand cofté de tout triangle eft compofé, & fe mefure par deux nombres premiers, fi on en excepte 3, 4, 5, & quelques-uns de fes multiples: mais lorfque le grand cofté eft impair comme il eft toûjours icy, il n'y a aucune exception.

Et partant il faudra exclure tous les quarrez (qui font la fomme des coftez des triangles) qui ont un nombre premier ou fa puiffance, pour la racine du plus grand double quarré.

Ainfi 5041, quarré de 71, fera auffi exclus, parce que le plus grand de fes doubles quarrez a 61 pour racine; de mefme 5329 fera exclus, parce que 53 eft fa grande racine, & que 61 & 53 font nombres premiers.

Les nombres ou quarrez fuivans, fçavoir, 6241, 7921, & 9409, feront auffi exclus, car ils ont bien un nombre compofé pour leur grande racine, mais la moindre n'eft pas mefurée par 12.

Comme auffi 57121 fera exclus, quoy-que fa moindre racine 168 foit mefurée par 12, car la grande racine 169 eft le quarré d'un nombre premier.

Il

Il ne reſtera donc à éxaminer que les nombres ou quarrez, dont la moindre des racines des doubles quarrez eſt meſurée par 12, & la grande eſt meſurée par deux nombres premiers; car puiſque les racines des doubles quarrez doivent eſtre les coſtez d'un triangle, elles doivent avoir les deux ſuſdites conditions qui appartiennent aux coſtez des triangles tels qu'il eſt ici requis.

On aura auſſi égard aux finales des coſtez des triangles, & par l'éxamen qu'on fera deſdits triangles on trouvera que lorſque le coſté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toûjours par 5.

Quand il finit par 4 ou 6, l'impair finit par 3 ou 7.

Quand il finit par 0, l'impair finit par 1 ou 9.

Par les regles précédentes on excluroit la pluſpart des nombres ſuſdits, & il ne reſteroit que 24, 265, qui appartiennent à 82369 quarré de 287; puis 168, 305, appartenans à 167281,] 288, 305, appartenans à 185761,] 84, 365, qui appartiennent à 187489,] 276, 325, qui dépendent de 208849, & 96, 425, qui viennent de 253009. Mais éxaminant leſdits nombres par les finales on rejettera 24, 265,] 84, 365,] 276, 325,] & 96, 425, parce que les finales 4 & 5,] & 6, 5, ne ſont point enſemble aux coſtez des triangles.

Reſte donc les couples 168, 305, & 288, 305 qu'il faut éxaminer, & voir ſi leurs quarrez eſtant joints enſemble font un quarré; mais il ſe trouve que non, & partant ils ne feront point les coſtez d'un triangle, & l'hypotenuſe des triangles ne ſera point quarrée.

Or le plus grand quarré de la table eſt 253009, & partant on ſera aſſuré qu'il ny a aucun quarré qui ſoit la ſomme des deux coſtez d'un triangle qui ait ſon hypotenuſe quarrée, s'il n'eſt plus grand que ledit 253009 quarré de 503.

Mais on pourroit traiter cette queſtion d'une autre ſorte, & au lieu de faire une table des quarrez qui ſont la ſomme des coſtez d'un triangle, on en pourroit faire une qui contiendroit tous les quarrez qui ſont hypotenuſes.

Or

Or parce que la méthode enſeigne de ſe ſervir des moindres nombres poſſibles, & auſſi de retrancher tout ce qui eſt inutile, comme on voit par le troiſiéme précepte, je cherche les moyens de faire leſdits racourciſſemens & excluſions.

Pour amoindrir les nombres on ſe ſervira des racines au lieu des quarrez des hypotenuſes, & par le moyen du triangle qui a ladite racine pour hypotenuſe, on aura le triangle qui a le quarré de ladite hypotenuſe; par éxemple, avec 3, 4, 5, je feray le triangle qui a 25 pour hypotenuſe, car ledit triangle eſt fait par les quarrez de 3 & 4, qui ſont coſtez dudit triangle 3, 4, 5.

Mais pour n'avoir point la peine de prendre leſdits quarrez de 3 & 4, je chercheray quelqu'autre méthode pour trouver 7 & 24, (qui ſont coſtez du triangle qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuſe,) par le moyen deſdits 3 & 4.

Et premierement 24 eſt le double du produit de 3 & 4, reſte donc à trouver 7. Si je prens la ſomme deſdits 3 & 4 j'auray 7, il faut donc voir à quelqu'autre triangle ſi cela réuſſira de meſme.

Au triangle 5, 12, 13, la ſomme de 5 & 12 eſt 17, mais 17 n'eſt pas coſté du triangle qui a 169 quarré de 13 pour hypotenuſe. Ledit triangle eſt 119, 120, 169. Je regarde ſi 17 meſure 119, & je trouve qu'il le meſure, le quotient eſt 7, lequel 7 eſt la différence de 5 à 12.

Je dis donc que ſi on multiplie la ſomme des deux coſtez par leur différence, on aura le coſté impair du triangle qui aura pour hypotenuſe le quarré de l'hypotenuſe du premier triangle.

Et je voy que la meſme choſe arrive au premier triangle 3, 4, 5, car 7 qui eſt la ſomme de 3 & 4, eſtant multiplié par la différence 1 donne 7 pour coſté du triangle, qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuſe, ſçavoir de 7, 24, 25.

De cette façon on aura les coſtez des triangles dont l'hypotenuſe eſt quarrée, par le moyen de tous les triangles, & ayant leſdits coſtez on aura leur ſomme: reſte donc à voir ſi cette ſomme ſera quarrée.

Mais

Mais afin de n'avoir point la peine d'éxaminer tous les triangles, il se faut servir de l'autre moyen, qui est de retrancher tout ce qui est inutile; ce qui se fera en considerant quelques propriétez du quarré, puisque ladite somme des costez doit estre un quarré: par éxemple, tout quarré impair (tel qu'est ladite somme) surpasse de l'unité un pairement pair.

De là on inférera que les triangles dont le moindre costé sera impair ne pourront pas donner de triangle qui ait un quarré pour la somme de ses costez, & partant on ne prendra que les triangles dont le moindre costé sera pair.

Et de cette autre propriété, que tout quarré non divisible par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3, on inférera que le moindre costé doit estre mesuré par 3, & partant il ne faudra considerer que les triangles dont le moindre costé sera mesuré par 12.

La façon dont on trouvera ces deux exclusions a esté traitée au commencement du présent éxemple, & partant on ne la répétera point icy; car les costez des triangles dont on parle icy sont les mesmes nombres qui doivent servir de racine aux doubles quarrez appartenans aux sommes quarrées susdites, & on a montré que la moindre des deux racines susdites doit estre mesurée par 12.

Je prens donc tous les triangles dont le moindre costé est mesuré par 12. Et on pourroit les mettre tous de suite commençant par 12, 35, 37,] 24, 143, 145,] 36, 77, 85,] 36, 323, 325, &c. mais parce qu'on a déja éxaminé cette question par une autre voye, sçavoir par la somme des costez, & qu'on l'a poursuivie jusqu'à faire que la somme des costez du triangle fust 253009, on commencera par des hypotenuses qui donneront à peu prés ladite somme, ou plûtost moins, afin que dans l'inégalité desdites sommes, qui sont souvent en proportion fort différente avec l'hypotenuse, on n'en omette aucune.

Je commenceray donc par les hypotenuses quarrées dont la racine n'est point moindre que 400, & suivray l'ordre desdites hypotenuses, les choisissant dans une table que je suppose estre faite

desdites hypotenuses, desquelles il ne faut prendre que les racines, comme il a esté dit.

Que si on n'avoit point travaillé à la question par la voye précédente, ou qu'on n'eust point de table desdites hypotenuses, il faudroit prendre les triangles dont le moindre costé se mesure par 12, & poursuivre, comme on vient de le montrer, & pratiquer les exclusions dont on parlera cy-apres.

On peut considerer les finales, & voir quelles elles doivent estre afin que la somme des costez du triangle qu'on fera soit un quarré.

Et premierement quand le costé pair du triangle est 2 ou 8, l'impair doit finir par 5. Si le pair finit par 0, l'impair peut avoir 1 ou 9 pour finale, & en toutes les façons susdites les finales n'empeschent point que la somme des costez du triangle qui sera produit du premier qui est icy consideré, ne soit un quarré.

Mais si le costé pair du premier triangle finit par 6, le costé impair doit finir par 3. Et si ledit costé pair finit par 4, l'impair doit avoir 7 pour finale; autrement si 6 estoit avec 7, & 4 avec 3, la somme des costez du triangle qui seroit produit, n'auroit pas une finale quarrée; ce qu'on montrera comme il s'ensuit.

Pour faire avec le premier triangle celuy dont l'hypotenuse est quarrée, on multiplie pour le costé impair la somme des deux costez par leur différence, & pour le costé pair on prend le double du produit des mesmes costez. Si donc les costez finissent par 6 & 7, la somme d'iceux finira par 3, car 7 & 6 sont 13, & la différence finira par 1, car le costé pair estant le moindre costé, il le faudra oster de 7.

Le produit de 1 par 3, sçavoir, de la somme par la différence, sera 3, & telle sera la finale du costé impair du triangle requis.

Pour le costé pair il faudroit prendre le produit des mesmes finales 6 & 7 qui finira par 2, & son double finira par 4, partant le costé pair finira par 4, lequel estant joint avec le costé impair qui finit par 3, la somme des deux finira par 7, qui n'est point une finale quarrée; car les quarrez impairs ont pour finale 1, 9,

ou

120.	391.	409.
84.	437.	445.
168.	425.	457.+
132.	475.	493.
---336.	377.	505.
396.	403.	565.
276.	493.	565.+
48.	575.	577.
240.	551.	601.
---336.	527.	625.
300.	589.	661.
---156.	667.	685.
108.	725.	733.+
216.	713.	745.
468.	595.	757.
432.	665.	793.
168.	775.	793.
540.	629.	829.+
---504.	703.	865.
348.	805.	877.
60.	899.	901.
420.	851.	949.
---696.	697.	985.
372.	925.	997.+
660.	779.	1021.
192.	1015.	1033.
132.	1085.	1093.
744.	817.	1105.
576.	943.	1105.
---264.	1073.	1105.
528.	1025.	1153.+
204.	1147.	1165.
660.	989.	1189.
612.	1075.	1237.

ou 25, & partant la somme des deux costez ne sera point un quarré.

On montrera de mesme que si les costez du premier triangle finissoient par 4 & 3, la somme des costez du triangle qui en seroit produit finiroit aussi par 7, & partant elle ne seroit point quarrée.

On voit icy plusieurs triangles qui ont tous leur moindre costé divisible par 12, & qui sont destinez pour faire des triangles qui ayent pour hypotenuse le quarré de l'hypotenuse de ceux-cy. Mais on en exclura ceux qui n'ont pas les finales de leurs costez ainsi qu'il est requis, & qui sont marquez devant leur moindre costé; comme sont 336, 377,] 336, 527,] 156, 667,] 504, 703,] &c. car le 6 se doit trouver avec le 3,] & le 4 avec le 7.

Il y a encore une autre exclusion, mais elle est tirée de la premiere partie de cet exemple, & de l'autre table.

Les costez des triangles qui sont en cette table-cy, sont les mesmes qui devroient estre les racines des doubles quarrez de la table précédente, car lesdites racines doivent estre les costez d'un triangle, & leurs quarrez doivent faire le triangle qui a les deux conditions susdites.

Or on a montré que la plus grande des deux susdites racines doit estre impaire, mais je veux icy montrer qu'elle est hypotenuse primitive.

Puisque le quarré qui est la somme des cos-

costez d'un triangle, est la différence d'un quarré & d'un double quarré, & qu'en la table susdite il y a toûjours deux couples desdits quarrez & doubles quarrez, en l'une desquelles le double quarré est plus grand que le quarré, & en l'autre il est moindre; il s'ensuit que le plus grand double quarré des deux est la somme de deux quarrez: par exemple, 49 est la différence de 1, 50, & de 32, 81, & partant dans la couple dont le double quarré est plus grand que le quarré 49, ledit double quarré qui est 50, est la somme de deux quarrez, sçavoir de 1 & 49, d'où il s'ensuit qu'il est hypotenuse: mais voyons quelle hypotenuse. Le quarré qui sert de somme aux costez comme 49, est toûjours impair, & partant l'autre quarré 1 sera aussi impair, puis qu'ensemble ils doivent faire un double quarré qui est pair; ce sont donc deux quarrez impairs qui sont premiers entr'eux, car s'ils avoient une commune mesure, le double quarré l'auroit aussi, & le triangle seroit multiple; mais on suppose qu'il soit primitif.

Puis donc que les deux quarrez, qui joints ensemble font le double quarré, sont impairs & premiers entr'eux; leur somme sera le double d'une hypotenuse primitive, comme on a dit ailleurs: mais la mesme somme est un double quarré, & partant la racine de ce double quarré sera hypotenuse primitive.

Le grand costé des triangles de la table précédente doit donc estre l'hypotenuse d'un triangle, & partant pairement pair plus 1.

Je marque donc les triangles dont le grand costé est hypotenuse, la marque est +, & rejette les autres dont le grand costé est pairement pair—1, comme 120, 391, 409, &c. & ceux ausquels ledit costé estant pairement pair+1, n'est pas néanmoins hypotenuse comme 84, 437, 445, &c.

Il n'y a donc que six triangles qui ne soient point exclus, sçavoir 168, 425, 457,] 276, 493, 565,] 108, 725, 733,] 540, 629, 829,] 372, 925, 997,] 528, 1025, 1153, desquels triangles il faudra faire ceux qui auront pour hypotenuse le quarré de leur

leur hypotenuſe. Ainſi avec 168, 425, 457, on fera le triangle dont l'hypotenuſe ſera le quarré de 457; mais on n'a beſoin que de la ſomme des coſtez dudit triangle, pour voir ſi c'eſt un quarré: par éxemple, on prendra pour le coſté pair dudit triangle le double du produit de 168 par 425, qui ſera 142800, l'impair ſe trouvera en multipliant la ſomme de 168 & 425 par leur différence, ſçavoir 593 par 257, le produit 152401 eſt le coſté impair, qui eſtant joint au coſté pair 142800 donne 295201 pour la ſomme des coſtez, qui n'eſt point un quarré ainſi qu'il paroiſtra en prenant la racine par la voye ordinaire, & par la meſme façon on trouvera que les autres cinq triangles ne donnent pas des triangles dont la ſomme des coſtez ſoit un quarré.

HUITIE'ME EXEMPLE.

TROUVER un triangle dont l'hypotenuſe & l'enceinte ſoient quarrées.

Je cherche quelque voye pour trouver l'enceinte des triangles, autrement qu'en ajouſtant les coſtez. Je trouve qu'on la peut avoir en multipliant la ſomme des racines des quarrez qui font le triangle, par le double de la plus grande racine. Ainſi au triangle 3, 4, 5, les racines ſont 2 & 1, leur ſomme eſt 3, qui multipliée par 4 (double de la plus grande racine 2) donne 12, pour l'enceinte dudit triangle.

De cette propriété je concluray que pour faire que l'enceinte ſoit un quarré, il faut que la ſomme des deux racines ſoit un quarré, & que la plus grande racine ſoit un double quarré, afin que venant à multiplier ladite ſomme (qui eſt un quarré) par un autre quarré (qui ſera le double de la plus grande racine,) on ait un quarré pour l'enceinte. Ainſi prenant pour les deux racines 18 & 7 qui enſemble font 25 on multipliera ladite ſomme 25 par 36 double de 18, & on aura 900 pour l'enceinte du triangle 252, 275, 373.

Maintenant il faut voir ce qui eſt néceſſaire pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée; ou bien ſuppoſant que l'hypotenuſe de ce trian-

triangle ſoit quarrée, je regarde ce qu'on en peut déduire.

Je voy que ſi l'hypotenuſe eſt quarrée, les racines des quarrez dont elle eſt la ſomme doivent eſtre les coſtez d'un triangle.

Mais parce qu'il faut qu'un meſme triangle ait l'hypotenuſe quarrée, & l'enceinte quarrée, je joins enſemble les deux ſuſdites conditions, & partant il faudra trouver un triangle dont le grand coſté ſoit double quarré, & la ſomme des deux moindres coſtez ſoit un quarré.

Pour faire que le coſté pair ſoit double quarré, il faut que le triangle ſoit fait de deux qq. parce que leurs racines doivent eſtre quarrées: il faudra donc trouver un triangle fait par deux qq. qui ait un quarré pour la ſomme de ſes moindres coſtez.

Or les nombres qui ſont la ſomme des deux coſtez d'un triangle ſont deux fois la différence d'un quarré, & d'un double quarré, & les racines des deux doubles quarrez ſont auſſi les racines des quarrez qui font le triangle: mais les quarrez qui font le triangle ſont des qq. partant leurs racines ſont quarrées: il s'enſuit donc que les racines des doubles quarrez ſuſdits ſont des quarrez.

On pourra donc ſe ſervir icy de la premiere table de l'exemple précédent qui contient les quarrez qui ſont la ſomme des coſtez d'un triangle: il faudroit donc trouver en ladite table, dans la liſte des couples appartenantes aux quarrez, quelque quarré qui euſt deux quarrez pour les racines de ſes doubles quarrez, ce qui ne ſe trouve point en toute cette table: toutefois on ne peut pas eſtre aſſeuré qu'il ne s'en trouvaſt point ſi on pourſuivoit la table plus loin, puiſque cela ſe trouve bien aux ſommes non quarrées, comme a 23 qui a 1 & 4 pour les racines de ſes doubles quarrez, & à 137 qui a 4 & 9.

Or cette table mene fort loin, car par ſon moyen on entre bien avant dans les nombres d'onze lettres, & voicy comme il y faudroit proceder, ſi on avoit trouvé deux quarrez qui ſerviſſent de racine à deux doubles quarrez appartenans à un meſme nombre.

Par exemple, ſi les racines des doubles quarrez qui appartiennent

à

à 247009 quarré de 497, ſçavoir 306, 353, eſtoient deux quarrez, & qu'on vouluſt par leur moyen faire le triangle qui auroit des quarrez pour ſon enceinte, & pour ſon hypotenuſe, voicy comme il y faudroit proceder.

Le triangle fait par les quarrez de 306 & 353, auroit pour coſté pair 216036, & pour coſté impair 30973.

Les quarrez de ces deux coſtez qui ſont 46671553296 & 959326729 eſtant joints enſemble donneront une hypotenuſe quarrée qui ſera 47630880025.

Or l'enceinte du triangle dont ledit nombre eſt hypotenuſe, ſe trouvera multipliant la ſomme des racines 216036 & 30973, ſçavoir 247009, (qui eſt un quarré, puiſque c'eſt le nombre auquel appartiennent les deux racines premierement priſes, ſçavoir, 306 & 353,) par le double de la plus grande, ſçavoir, par 432072 pour avoir 106725672648 qui ſera l'enceinte du triangle, dont l'hypotenuſe ſera le quarré ſuſdit 47630880025.

Et cette enceinte ſeroit auſſi un quarré ſi les deux nombres ſuſdits 306 & 353 eſtoient quarrez, car cela eſtant, 216036 qui eſt le double de leur produit, ſeroit un double quarré, & le double de ce nombre, ſçavoir 432072, ſeroit un quarré : ſi donc on vient à le multiplier par 247009 qui eſt auſſi un quarré, le produit ſeroit un quarré : or ce produit eſtant l'enceinte d'un triangle qui a un quarré pour hypotenuſe, ledit triangle auroit les deux conditions requiſes.

On peut encore examiner cette meſme queſtion d'une autre façon comme il s'enſuit.

L'enceinte ſe trouve, comme il a eſté dit, en multipliant la ſomme des deux racines par le double de la plus grande des deux ; il faudra donc, afin que l'enceinte ſoit quarrée, que la ſomme des deux racines ſoit un quarré, & la plus grande ſoit un double quarré, afin que ſon double ſoit un quarré. Mais afin que l'hypotenuſe ſoit quarrée, il faut que les racines ſuſdites ſoient coſtez de triangles, afin que leurs quarrez eſtant joints enſemble faſſent le quar-

quarré d'une hypotenuse : il faudra donc trouver un triangle dont le grand costé soit double quarré, & la somme des deux moindres costez soit un quarré.

Puisque le grand costé doit estre double quarré, il faut qu'il soit le double d'un quarré pair, car autrement il ne seroit pas pairement pair, ainsi qu'il est requis aux costez pairs, & partant il aura pour finales 2, 8, ou 0, comme lesdits doubles quarrez.

Or quand le costé pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toûjours par 5, (ce qui se doit entendre aux primitifs dont nous parlons icy) & partant la somme des costez finit par 7 ou 3, qui ne sont point finales quarrées.

Et partant si le costé impair finit par 2 ou 8, la somme des deux costez ne pourra pas estre un quarré.

Reste donc que le costé pair finisse par 0, car ainsi l'impair finira par 1 ou 9, & la somme desdits costez aura une finale quarrée.

On considerera par aprés que tout quarré non divisible par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3, & partant le double quarré sera ternaire+2 ou—1. Mais en tout triangle l'un des costez se mesure par 3, & partant si le costé pair n'est point ternaire, l'impair le sera, & la somme de ces costez dont l'un est ternaire, & l'autre ternaire—1 sera aussi ternaire—1, & partant ce ne sera pas un quarré ainsi qu'il est requis.

Il faut donc que le costé pair soit mesuré par 3 & aussi par 5, afin qu'il finisse par 0; il ne pourra donc estre moindre que 1800, double du quarré de 30.

On remarquera aussi que le costé impair doit estre ternaire+1, afin qu'estant joint au costé pair qui est ternaire, il fasse un ternaire+1 qui puisse estre quarré.

Or la moitié du costé pair, sçavoir 900 est produite par les racines des deux quarrez constitutifs du triangle, lesquelles racines doivent nécessairement estre quarrées, afin qu'elles soient premieres entr'elles, & l'une d'icelles doit estre mesurée par 9 & l'autre non,

non, puiſque le coſté pair eſt meſuré par 9.

Et partant le coſté impair eſtant la différence des deux quarrez deſdites racines, il ſera la différence de deux qq. le moindre deſquels doit eſtre meſuré par 81, & ſa racine par 9, autrement le coſté impair ſeroit ternaire—1 car puiſque l'un des deux qq. doit eſtre meſuré par 3 ou 81, ſi c'eſtoit le plus grand qui le fuſt, donc le moindre qq. ſeroit ternaire+1, lequel eſtant oſté du plus grand qui ſeroit ternaire, reſteroit un ternaire—1 pour ledit coſté impair.

Ce meſme coſté impair doit eſtre auſſi pairement pair+1, autrement eſtant joint au coſté pair, il ne feroit pas un pairement pair+1, comme doit eſtre la ſomme pour eſtre quarrée; & partant le ſuſdit moindre qq. qu'on a montré devoir eſtre meſuré par 81, doit eſtre pair; car s'il eſtoit impair, le grand qq. ſeroit pair, & leur différence ſeroit un pairement pair—1; car ſi on oſte un pairement pair+1 d'un pairement pair, il reſtera un pairement pair—1, & partant la racine de ce moindre qq. ſera au moins 36.

D'ailleurs puiſque tout qq. impair ſurpaſſe de l'unité un multiple de 16, le coſté impair, qui eſt la différence de deux qq. le plus grand deſquels eſt impair, ſurpaſſera auſſi de l'unité un multiple de 16, car le qq. pair eſtant diviſible par 16 (comme tout qq. pair doit eſtre,) ſi on l'oſte d'un multiple de 16+1, il reſtera un multiple de 16+1.

Quand donc on aſſemblera les deux coſtez, ſçavoir le pair avec l'impair, ſi le pair ne ſe meſure que par 8 comme 1800, (qu'on avoit pris pour le moindre coſté pair poſſible) la ſomme des deux coſtez ſuſdits retiendra auſſi cette reſtriction, & ſupaſſera de l'unité un multiple de 8 & non pas de 16.

Mais les nombres qui ſont particulierement affectez à eſtre la ſomme des coſtez des triangles, différent tous de l'unité d'un multiple de 8, & partant leurs quarrez ſurpaſſeront de l'unité un multiple de 16, tels ſont 49, 289, 529, &c.

De là il s'enſuit que le coſté pair doit au moins eſtre meſuré par

16, & partant au lieu de 1800 il faudra prendre son quadruple 7200, double de 3600, quarré de 60, qui est le moindre qui puisse avoir les conditions requises, sçavoir d'estre double quarré, & d'estre divisible par 3, 5, & 16.

Mais ledit 7200 se trouvera encore trop petit: car si on prend, comme il a esté dit, les parties de la moitié 3600 en telle sorte que la partie paire soit mesurée par 9 ainsi qu'il est requis, on aura pour parties 144 & 25; mais la partie paire doit estre la moindre comme on a montré cy-devant, puisqu'elle est la racine d'un qq. pair, qui doit estre le moindre des deux.

Si donc 144 est la moindre partie possible, il faut que l'autre soit plus grande, & qu'elle se mesure par 25, & que ce soit un quarré comme 625, qui multiplié par 144 donne 90000, dont le double 180000 sera le moindre costé pair qu'on doive examiner.

Mais le costé pair estant tel, & prenant 144 & 625 pour les parties qui doivent faire le triangle, le costé impair se trouvera plus grand que le pair, car ce sera 369889. Or est-il qu'il doit estre moindre que le pair, puisque la question requiert que le grand costé soit double quarré, & par conséquent pair.

Il faut donc voir ce qui fait icy que le grand *costé est impair*. Cela provient de ce que les parties susdites 144 & 625, qui doivent estre les racines des quarrez dont le triangle est formé sont trop distantes l'une de l'autre, & sont hors des bornes nécessaires pour faire que le grand costé soit pair.

Il faudra donc prendre des nombres moins différens pour lesdites racines comme 576 & 625, ausquelles la moindre est toûjours paire, & le double du produit desdites racines sçavoir 720000 sera le costé pair, & l'impair sera 58849.

Or si la somme de ces deux costez qui est 778849 estoit un quarré, on auroit ce qui est requis; car multipliant ladite somme 778849 par 1440000 double du grand costé 720000, on auroit 1121542560000, qui est l'enceinte du triangle qui est

fait

fait par les quarrez deſdits 720600 & 58849, duquel triangle l'hypotenuſe eſt le quarré de la ſomme des quarrez de 576 & 625; ou ſi on veut l'hypotenuſe dudit triangle eſt le quarré de l'hypotenuſe du triangle, dont les coſtez ſont 720000 & 58849.

Et l'enceinte ſuſdite 1121542560000 ſeroit un quarré, puiſqu'elle ſeroit le produit des deux quarrez 778849 & 1440000. Mais parce que ledit 778849 (qui eſt la ſomme des coſtez 720000 & 58849) n'eſt pas quarré, l'enceinte ſuſdite ne ſera pas auſſi un quarré.

On voit donc par là que s'il y a des triangles qui ayent leur hypotenuſe & leur enceinte quarrée, il faut que ladite enceinte ſoit fort grande, puiſque la moindre & premiere qui ait beſoin d'eſtre éxaminée a treize lettres comme on voit icy.

Qui voudroit paſſer outre, on pourroit prendre 1225 au lieu de 625, puis on augmenteroit auſſi 576 prenant garde toûjours que la partie paire ſoit la moindre, mais que l'impaire ne l'excéde pas plus que de la raiſon qu'il y a de 1 à 2 à 1, & que ſi la partie paire eſt 1000000, l'impaire n'excede pas 2414213.

Cet examen conduiroit fort loin avec peu de nombres.

Et pour éxaminer leſdits 576 & 1225, je les prens pour racines des quarrez qui font un triangle, partant le coſté pair ſera 1411200, & l'impair ſera 1168849, (qui ſe trouve multipliant la ſomme de 576 & 1225 par leur différence, ſçavoir 1801 par 649) la ſomme des deux coſtez ſera 2580049 qui n'eſt point quarrée, & partant on pourroit paſſer à un autre; car l'enceinte de l'autre triangle qu'on cherche ne ſeroit point un quarré, puiſqu'elle ſe trouve multipliant ladite ſomme 2580049 par le double du coſté pair, ſçavoir par 2822400 qui eſt un quarré.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

TROIS Marchands ont mis ensemble quelque argent pour leur trafic : celuy du premier a profité pendant six mois, celuy du second pendant neuf mois, & celuy du dernier pendant douze mois.

Le premier a receû 70. livres, tant pour sa mise que pour son gain. Le second 230. livres. Le troisiéme 180. livres. On demande la mise de chacun.

Ces sortes de questions dépendent de la premiere regle, car on peut prendre d'autres exemples de mesme nature dont on aura la solution.

Ainsi je fais une autre question semblable à la premiere, & je pose que le premier Marchand ait mis 8. livres, & ait gagné 12. livres en six mois; le second & le troisiéme doivent profiter à mesme raison eû égard au temps : si donc le second a mis 6. livres, son gain sera de 9. livres en six mois, & partant si son argent a profité pendant neuf mois, le profit sera de 13. livres 10. sols. Si le troisiéme a mis 3. livres, le profit en six mois sera de 4. livres 10. sols, & en douze mois de 9. livres.

Donc le premier aura 20. livres, tant pour son profit en six mois que pour sa mise. Le second aura 19. livres 10, sols, pour son profit de neuf mois & pour sa mise. Le troisiéme aura 12. livres pour son profit en douze mois & pour sa mise.

Il faut donc voir comment avec 20. livres & six mois de temps on trouvera la mise qui est 8. livres, & de mesme des autres.

C'est la façon ordinaire des questions qui n'ont qu'une solution, ou qui ont tout nombre pour solution comme celle-cy : mais pour cel-

celles qui en ont une multitude indéfinie (on entend icy parler des nombres dont il y a ou dont il peut y avoir une infinité, & qui néanmoins vous menent bientost à de fort grands nombres, comme qui demanderoit les nombres parfaits, ou ceux qu'on nomme Amiables) on n'est pas obligé de trouver 8, car ce seroit un grand hazard si on trouvoit 8 parmi tant d'autres nombres qu'on peut donner; & puisque le gain ni la mise ne sont point séparément déterminez, on pourra prendre quel nombre on voudra pour la mise ou pour le gain, car on peut augmenter & diminuer l'un ou l'autre tant qu'on voudra; il suffit seulement de faire que l'argent de chacun profite également en temps égal, & en temps inégal à proportion du temps. Or on peut séparer un nombre en deux parties, qui auront entr'elles telle raison donnée qu'on voudra.

Mais puisqu'en la question proposée la raison de la mise & du gain n'est point donnée, il sera permis de prendre le nombre & la raison à discrétion, puisque la somme de la mise & du profit peut estre séparée en deux parties qui auront telle raison qu'on voudra.

Je pose donc que la mise du premier soit de 50. livres, son profit sera donc de 20. livres; il faut donc voir qu'elle raison il y a de 50 à 20: mais parce que le temps de chacun est différent, il faut diviser le profit par le temps, & pour plus grande facilité je prens le plus grand nombre qui soit commun aux temps des trois Marchands. On aura donc pour le premier Marchand deux termes, pour le second trois termes, & pour le troisiéme quatre termes.

Je regarde quel profit a fait le premier Marchand en un terme, & je trouve 10. livres. Je considere maintenant quelle raison il y a de la mise 50 au profit d'un terme 10, la raison est quintuple, & le profit est par terme la cinquiéme partie de la mise.

On posera donc $\frac{5}{5}$ pour la mise de chacun $\frac{5}{5}$. & parce que les sommes données contiennent la mise & le gain tout ensemble, il faut assembler le profit avec lesdits $\frac{5}{5}$.

Le second Marchand a laissé son argent à profit pendant trois ter-

termes, & en chaque terme a gagné la cinquiéme partie de sa mise: or la mise estant $\frac{5}{5}$, la cinquiéme partie sera $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{5}$ pour les trois termes; & parce que les 230. livres qu'a euës le second Marchand continnent la mise & le gain, il faut assembler les $\frac{5}{5}$ de la mise, avec les $\frac{3}{5}$ de gain, & on aura en tout $\frac{8}{5}$, je diray donc par la régle de proportion:

Si $\frac{8}{5}$ donnent 230, combien $\frac{5}{5}$, ou bien:

Si 8 donnent 230. livres, combien 5. Je multiplie 230 par 5, & je divise le produit 1150 par 8, le quotient 143. livres 15. sols sera la mise du second.

De mesme pour le troisiéme Marchand, sa mise estant $\frac{5}{5}$, son profit pour quatre termes à raison de $\frac{1}{5}$ pour terme sera $\frac{4}{5}$, qui estant joint à la mise donne $\frac{9}{5}$ pour la somme qui represente 180. Je trouveray donc par la mesme régle de proportion que:

Si $\frac{9}{5}$ ou 9 donnent 180, —— $\frac{5}{5}$ ou 5 donneront 100 pour la mise du troisiéme Marchand.

Si on avoit pris 60. livres pour la mise du premier Marchand, le profit seroit 10. livres en deux termes, & partant 5. livres par terme, qui est la douziéme partie de la mise, & sur cette proportion on trouveroit les mises des autres.

DIXIE'ME EXEMPLE.

TROUVER un triangle dont l'hypotenuse soit quarrée, & dont le moindre costé ait un quarré pour différence avec chacun des deux autres.

Puisque le triangle a deux propriétez différentes, il les faut examiner l'une aprés l'autre.

1°. Pour faire que l'hypotenuse soit quarrée, il faut que les racines des quarrez qui la composent soient les deux costez d'un autre triangle.

2°. Pour faire qu'un triangle ait son moindre costé différent d'un quarré de chacun des deux autres, il faut prendre pour la racine du

du plus grand des deux quarrez qui le composent, l'hypotenuse d'un triangle, & la racine de l'autre quarré sera un des moindres costez du mesme triangle, moins la différence de l'hypotenuse & de l'autre costé. Ainsi ayant choisi le triangle 3, 4, 5, l'hypotenuse 5 sera la racine du grand quarré, & pour l'autre racine j'osté d'un des costez comme de 3 la différence de 4 à 5, ou de 4 la différence de 3 à 5, & restera 2. On a donc 5 & 2 dont les quarrez font le triangle 20, 21, 29, qui a la condition requise. On peut voir cela dans le discours des triangles.

Mais lesdites racines 5 & 2 doivent estre les deux costez d'un triangle, si on veut que l'hypotenuse qui sera faite de leurs quarrez soit un quarré.

Il faut donc trouver un triangle dont le moyen costé soit l'hypotenuse d'un autre triangle, & le moindre costé soit un des costez de cét autre triangle moins la différence de ladite hypotenuse & de son autre costé. De sorte que si 5 & 2 estoient les deux costez d'un triangle, on auroit ce qu'on cherche, parce que le moyen costé 5 est l'hypotenuse du triangle 3, 4, 5, & le moindre costé 2 est un des costez dudit triangle 3, 4, 5, moins la différence de l'autre costé & de l'hypotenuse.

Je chercheray par aprés en la table des triangles, si je trouveray un triangle qui ait ses deux costez tels qu'il est requis.

Et pour abréger & exclure les superflus, je voy que le grand costé doit estre une hypotenuse, je ne m'arresteray donc qu'aux triangles dont le grand costé sera impair & hypotenuse primitive, car les hypotenuses multiples ne doivent point icy estre considerées, à raison que le triangle dont elles sont hypotenuses est multiple, & le triangle auquel elles serviroient de costé seroit aussi multiple: or nous n'avons dans la table que des primitifs, & il ne serviroit de rien aussi de considerer les multiples.

Or il y a beaucoup de manieres pour connoistre si un nombre n'est

n'est point hypotenuse: mais il ne se faut servir que de celles qui donnent d'abord à connoistre que le nombre n'est point hypotenuse, comme s'il est pairement pair — 1; & s'il est divisible par 3, on rejettera donc les triangles ausquels le costé impair est petit costé, & ceux aussi ausquels ledit costé impair est mesuré par 3, & ceux ausquels il est pairement pair — 1.

Je considere aussi quel doit estre l'autre costé du triangle, & je trouve qu'il doit estre moindre que la moitié du moyen costé qui doit estre hypotenuse, comme on voit à 5 & 2, & cela est facile à juger par la construction de 2.

Les costez impairs sont dans la seconde colomne de la table aprés l'hypotenuse.

Avec cela j'examine les triangles de la table, & je regarde ceux dont le grand costé est impair, & surpasse de l'unité un pairement pair.

Le premier est celuy qui a 21 pour grand costé: mais parce que 21 est mesuré par 3, je passe outre. Je laisse aussi 45, & puis 77, parce qu'on voit sans peine qu'il est divisible par 7, lequel 7 n'estant point hypotenuse, ses multiples ne seront point aussi hypotenuses primitives.

Le premier qu'on trouve qui doive estre examiné est 221, son autre costé est 60, je trouve que 221 est hypotenuse des triangles 221, 21, 220, & de 221, 171, 140. Mais d'abord je trouve du defaut à tous les deux, car puisque 60 doit estre moindre que l'un & l'autre des costez du triangle auquel 221 sert d'hypotenuse, le triangle 221, 21, 220, n'y pourra pas servir.

Dans l'autre triangle 171 estant pairement pair — 1, si on l'oste de 221, qui estant hypotenuse doit toûjours estre pairement pair + 1, il restera un impairement pair, qui estant osté d'un pairement pair, sçavoir du costé pair 140, restera un impairement pair, lequel partant ne pourra pas estre le costé pair d'un triangle tel qu'est 60. Il faut donc:

1°. Que le grand costé du triangle serve d'hypotenuse à un autre triangle.

2°.

2°. Que le petit costé qui est pair, soit moindre que la moitié du grand costé.

3°. Que le second triangle auquel le grand costé du premier sert d'hypotenuse, ait son moindre costé plus grand que le moindre costé du premier.

4°. Que ledit second triangle ait un pairement pair + 1, pour son costé impair.

Le premier triangle qui ait toutes ces conditions est 457, 425, 168, car le grand costé 425 est l'hypotenuse d'un autre triangle, & le petit costé 168 est moindre que la moitié de 425; de plus 425 sert d'hypotenuse au triangle 425, 297, 304, auquel le moindre costé 297 est plus grand que 168, & le costé impair 297, est pairement pair + 1.

Mais on pourroit encore donner une autre condition au second triangle, auquel il faut, qu'ostant 304 de 425, & ostant ce qui reste de 297, il reste enfin 168; mais ledit 168 doit nécessairement estre divisible par 3, & desdits trois costez 425, 297, 304, il ne sçauroit y avoir que l'un des deux moindres divisible par 3, & partant afin que la derniere difference ou reste soit mesuré par 3, il faut que les deux autres, comme 425, 304, excédent 3 d'une mesme quantité, car ainsi leur difference sera mesurée par 3, cette difference estant par aprés ostée du troisiéme costé qui est aussi mesuré par 3, le dernier reste sera mesuré par 3, & cette cinquiéme condition ne se trouve pas dans ledit triangle 425, 297, 304, car 304 surpasse un ternaire de l'unité, & 425 le surpasse de 2.

Passant outre à chercher les triangles, on trouve 725 qui sert de costé au triangle 733, 725, 108, & d'hypotenuse au triangle 725, 333, 644, lesquels ont les cinq conditions requises; car pour la cinquiéme, 644 surpasse de 2 un ternaire aussi bien que l'hypotenuse 725: mais si on considere les finales, on verra que cela ne peut réussir, c'est-à-dire, que si on oste 333 de 725, & qu'on oste le reste de 644, il ne peut pas rester 108 comme il seroit besoin, ce qui se connoistra ostant seulement les dernieres lettres: car si

on oste le | 3 | de 333, du | 5 | de 725, il restera 2, lequel estant osté du | 4 | de 644, restera 2, mais il faudroit qu'il restast 8 pour avoir la finale de 108.

La consideration de ces finales est fort facile, & montre d'abord l'impossibilité quand elle provient de là. On peut aussi juger de cette façon de recherhe qu'en travaillant on trouve toûjours de nouvelles facilitez & abrégez.

Mais passant outre à la recherche on trouvera 925 au triangle 997, 925, 372, qui a aussi les quatre premieres conditions avec celuy qui a 925 pour hypotenuse, sçavoir 925, 533, 756 : mais ce dernier n'a pas la cinquiéme, joint que les finales y répugnent comme au précédent.

Le mesme empeschement se trouve aussi à 1261, 1189, 420, & à son correspondant 1189, 989, 660.

Enfin on trouve 1517 au triangle 1525, 1517, 156, & son correspondant 1517, 165, 1508, qui sont les premiers qui ont toutes les conditions requises, & mesme les finales s'accordent bien à ce qui est requis. On éprouvera donc si ostant de 165 la difference de 1508 à 1517, on aura 156; j'oste 1508 de 1517, reste 9, lequel estant osté de 165, reste 156 ainsi qu'il est requis.

On a donc trouvé un triangle dont le moyen costé, sçavoir 1517, est hypotenuse d'un autre triangle, & dont le moindre costé 156 est moindre que l'un des costez du second triangle de la difference de l'autre costé à l'hypotenuse, car 156 est moindre que 165 de 9, lequel 9 est la difference de l'autre costé 1508 & de l'hypotenuse 1517; ce qu'il falloit trouver.

Ayant ce triangle 156, 1517, 1525, on aura celuy qui est requis, prenant les costez de celuy-cy pour les racines des quarrez qui le composent, les quarrez de 156 & 1517 sont 24336 & 2301289, qui donnent le triangle 473304, 2276953, 2325625, auquel l'hypotenuse est un quarré dont la racine est 1525, & le moindre costé 473304 a un quarré pour difference avec chacun des deux autres, car sa difference avec le moyen costé est 1803649 quarré de 1343, & avec l'hypotenuse 1852321 quarré de 1361. Ainsi qu'il estoit requis.

FIN.

TRAITÉ.

DES

TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

DANS LEQUEL

PLUSIEURS BELLES PROPRIETEZ

de ces Triangles sont démontrées par de nouveaux principes.

Par M. FRENICLE.

TRAITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

PREMIERE PARTIE.

DEFINITIONS.

I.

LORS qu'un nombre quarré est égal à la somme de deux autres nombres quarrez, les trois nombres qui sont les racines de ces trois quarrez, seront appellez un Triangle Rectangle en nombres, ou les trois costez d'un Triangle Rectangle en nombres. Ainsi on dira que 3, 4, 5, est un Triangle Rectangle en nombres, parce que 25, quarré de 5, est égal à la somme de 16, & 9, qui sont les quarrez des deux autres nombres 3, & 4.

I I.

Les deux moindres nombres d'un Triangle Rectangle en nombres, seront appellez les costez ou les moindres costez de ce Triangle, la moitié de leur produit sera appellée l'aire de ce Triangle, & le troisiéme nombre sera appellé son hypotenuse, ou son plus grand costé.

I I I.

Triangle Rectangle primitif en nombres, est celuy entre les trois costez duquel il n'y a point d'autre commune mesure que l'unité.

I V.

Triangle Rectangle composé en nombres, est celuy dont les trois costez sont mesurez par un mesme nombre autre que l'unité.

V.

Un Triangle Rectangle en nombres sera dit double d'un autre, lorsque ses trois costez sont doubles des trois costez de l'autre, chacun du sien, & de mesme à l'égard des autres multiples.

V I.

On appelle icy nombre pairement pair celuy qui est mesuré par quatre; & nombre impairement pair, celuy qui est mesuré par deux, & non par quatre.

SUPPOSITIONS.

I.

Si deux nombres quarrez estant joints ensemble ne font point un

un nombre quarré, les racines de ces deux quarrez ne seront point les costez d'un Triangle Rectangle en nombres.

II.

Si les trois costez d'un Triangle Rectangle en nombres sont multipliez par un mesme nombre, les trois produits seront les trois costez d'un Triangle Rectangle en nombres; & si les trois costez d'un Triangle Rectangle en nombres ont une mesme mesure autre que l'unité, & qu'ils soient divisez par cette commune mesure, les trois quotiens seront les trois costez d'un Triangle Rectangle en nombres.

III.

Tout nombre quarré est mesuré par tous les nombres qui mesurent sa racine. Il en est de mesme des nombres cubes, quarrez quarrez, & autres puissances; & si un quarré est mesuré par un nombre premier, sa racine sera aussi mesurée par ce nombre premier, ou sera ce mesme nombre premier.

IV.

Un nombre quarré estant multiplié par un autre nombre quarré, le produit est un nombre quarré: mais s'il est multiplié, ou divisé par un nombre non quarré, le produit, ny le quotient, ne seront point des quarrez.

V.

Tout nombre multiplié par un nombre pair, fait un nombre pair; & tout nombre impair adjousté à un nombre pair, ou multiplié par un impair, fait un impair; & la somme de deux impairs, est un nombre pair.

VI.

Si deux nombres sont entre eux comme quarré à quarré, leurs moitiez, ou autres pareilles parties, seront aussi entre elles comme quarré à quarré.

VII.

Si deux nombres ont entre eux une commune mesure, la somme & la difference de ces nombres, & aussi leurs doubles, auront la mesme commune mesure.

VIII.

Le quarré de la somme de deux nombres est égal au quarré de leur difference, & au quadruple du produit des mesmes nombres.

IX.

Si un mesme nombre multiplie deux nombres & leur difference, ce dernier produit sera la difference des deux premiers produits.

X.

Trois nombres estant donnez, le nombre solide produit par ces nombres sera toûjours le mesme, en quelque ordre qu'on les multiplie: le mesme arrivera, s'il y a plus de trois nombres qui se multiplient de suite.

XI.

Deux nombres plans semblables non quarrez ne peuvent estre premiers entre eux, n'y l'un d'eux premier au double de l'autre. D'où il s'ensuit, que le produit de deux nombres premiers entre eux ne peut estre un nombre quarré, s'ils ne sont eux-mesmes des quarrez; ny double quarré, si l'un d'eux n'est un quarré, & l'autre un double quarré.

XII.

XII.

On suppose aussi que ce qu'on fait voir par le Calcul de l'Algebre n'a pas besoin d'autre preuve; & on l'employe dans ce traité, lorsque les propositions sont faciles, ou que leurs demonstrations son trop obscures.

REMARQUES.

I.

Ces propositions sont supposées, comme estant démontrées par les Auteurs, ou parce qu'elles sont faciles d'elles mesmes.

II.

L'unité est icy employée pour nombre, & mesme pour nombre quarré, ou quarré quarré.

III.

Lors qu'on parle icy de Triangles, ou de Triangles Rectangles, on entend parler des Triangles Rectangles en nombres entiers.

LEMME

PROPOSITION I.

Tout nombre au dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

Le premier nombre au dessus de l'unité est 2, qui est moindre d'une unité que 3, & par conséquent est ternaire — 1; & entre deux ternaires de suite comme 3 & 6, ou 6 & 9, &c. il n'y

M a toû-

a toûjours que deux nombres, comme entre 3 & 6 il n'y a que 4 & 5, dont le premier excède le priemier ternaire d'une unité, & le second est moindre d'une unité que le second ternaire; & par conséquent le premier est ternaire + 1, & le second ternaire — 1. La mesme chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres : donc tout nombre au dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + ou — 1. ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

PROPOSITION II.

Tout nombre impair au dessus de l'unité est quaternaire + ou — 1:

DEMONSTRATION.

Le premier impair au dessus de l'unité est 3, qui est moindre d'une unité que 4, & par conséquent est quaternaire — 1, & entre deux quaternaires de suite, comme 4 & 8, ou 8 & 12, &c. il n'y a toujours que trois nombres, dont celuy du milieu est pair, & les autres deux sont impairs; comme entre 4 & 8 il n'y a que 5, 6 & 7, donc 5 & 7 sont impairs : & il est manifeste que 5 est 4 + 1, c'est à dire quaternaire + 1, & que 7 est 8 — 1, c'est à dire, quaternaire — 1, puisque 8 est quaternaire. La mesme chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres. Donc tout nombre impair au dessus de l'unité est quaternaire + ou — 1. ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

PROPOSITION III.

Tout nombre au dessus du nombre deux est quinaire, ou quinaire + ou — 1, ou quinaire + ou — 2.

DE-

DEMONSTRATION.

Les deux premiers nombres entre 2 & 5 sont 3 & 4, & il est evident que 3 est 5 — 2, & que 4 est 5 — 1, & par conséquent 3 est quinaire — 2, & 4 est quinaire — 1; & entre deux quinaires de suite, comme 5 & 10, ou 10 & 15, &c. il n'y a toûjours que quatre nombres, comme entre 5 & 10 il n'y a que 6, 7, 8, & 9, dont le premier excède 5 d'une unité, le second de deux unitez, le troisiéme est moindre de deux unitez que le second quinaire, & le quatriéme seulement d'une unité, & par conséquent le premier de ces quatre nombres est quinaire + 1, le second est quinaire + 2, le troisiéme quinaire — 2, & le quatriéme quinaire — 1. La mesme chose arrive nécessairement dans tous les autres nombres. Donc tout nombre au dessus du nombre 2 est quinaire, ou quinaire + ou — 1, ou quinaire + ou — 2. ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

PROPOSITION IV.

Le quarré de tout nombre pairement pair est octonaire, & le quarré de tout nombre pairement impair, au dessus de deux, est octonaire + 4.

DEMONSTRATION.

Le premier nombre pairement pair est 4; & d'autant que 4 est moyen proportionnel entre 2 & 8, son quarré 16 sera égal à 2 fois 8, & par conséquent sera mesuré par 8, c'est à dire, sera octonaire. Or tout autre nombre pairement pair est multiple de 4. Soit donc 4 A, lequel on voudra de ces nombres, son quarré *Def. 6.*

M 2 sera

sera 16 A^2, qui sera multiple de 16 par A^2, c'est à dire de 8 par 2 A^2, & par conséquent ce quarré sera mesuré par 8, & sera octonaire. Donc le quarré de tout nombre pairement pair est octonaire. Que si un nombre au dessus de 2 est pairement impair, il sera 4 A + 2, & son quarré sera 16 A^2 + 16 A + 4, c'est à dire, octonaire + 4, puisque la somme de 16 A^2 & de 16 A est octonaire. Donc le quarré de tout nombre pairement pair, &c. Ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

PROPOSITION V.

Tout nombre quarré au dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + 1.

DEMONSTRATION.

Tout nombre au dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire
Prop. 1. + ou — 1. Or si la racine du quarré est ternaire, son quarré
Supp. 3. le sera aussi.

Supp. 12. Si elle est ternaire + 1, son quarré sera aussi ternaire + 1. Car soit cette racine 3 A + 1, son quarré sera égal au quarré de 3 A, plus 2 fois le produit de 3 A par 1, plus le quarré de l'unité; mais les trois premiers nombres estant ternaires, leur somme sera ternaire: si donc on y ajoûte le quatriéme, qui est l'unité; le tout, qui est le quarré de 3 A + 1 sera ternaire + 1.

Que si la racine est ternaire — 1, son quarré sera aussi ternaire + 1.
Supp. 12. Car soit cette racine 3 A — 1, son quarré sera égal au quarré de l'unité, plus le quarré de 3 A, sçavoir 9 A^2, moins 6 A, qui est deux fois le produit de 3 A par 1; mais 6 A estant ternaire, si on l'oste de 9 A^2, quarré de 3 A, qui est ternaire, le reste sera ternaire; & par conséquent estant joint au quarré de l'unité, le tout sera ternaire + 1. Donc tout nombre quarré au dessus de l'unité est ternaire, ou ternaire + 1. ce qu'il falloit prouver.

LEM-

LEMME.

PROPOSITION VI.

Si un nombre quarré est mesuré par un nombre premier, il le sera aussi par son quarré; & si un nombre est mesuré par un nombre premier, & non par son quarré, il ne sera pas nombre quarré.

DEMONSTRATION.

SOIT A un nombre premier qui mesure B^2, je dis que A^2 mesurera aussi B^2; car A mesurera aussi B; soit C le nombre par lequel il le mesure: donc C A sera égal à B, & C^2 A^2 quarré de C A, sera égal à B^2; donc B^2 sera mesuré par A^2; ce qu'il falloit prouver. Que si D est un nombre mesuré par A nombre premier, & non par A^2, il ne sera pas quarré; car s'il estoit quarré, il seroit aussi mesuré par A^2 par la premiére partie, ce qui est contre l'hypothese. Donc si un nombre quarré est mesuré, &c. Ce qu'il falloit prouver. On prouvera de mesme qu'en la premiere partie, qu'un nombre quarré est mesuré par les quarrez de tous les nombres qui mesurent sa racine. *Supp. 3.* *Supp. 12.*

LEMME.

PROPOSITION VII.

Tout nombre quarré impair au dessus de l'unité est octonaire + 1.

DEMONSTRATION.

TOUT nombre impair au dessus de l'unité est quaternaire + ou — 1: Or si la racine du quarré impair est 4 A + 1, son *Prop. 2.*

 quar-

Supp. 12. quarré sera 16 A^2, plus 8 A, plus l'unité: mais 16 A^2 est mesuré
Prop. 4. par 8, & 8 A est aussi mesuré par 8; donc leur somme sera mesurée par 8; & y ajoûtant le quarré de l'unité, le tout sera octo-
Supp. 12. naire + 1. Que si la Racine est un quaternaire — 1, pour avoir son quarré, il faudra oster du quarré du premier nom mesuré par 16, le double produit des deux noms qui est octonaire; & il restera un octonaire, auquel ajoûtant l'unité, quarré du deuxime nom — 1, on aura encore un octonaire + 1, pour le quarré d'un quaternaire — 1. Donc tout nombre quarré impair au dessus de l'unité est octoinaire. + 1. ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE I.

Il s'ensuit que la somme de deux quarrez impairs est toûjours un nombre impairement pair, & n'est point un nombre quarré. Cela est évident, car si on assemble un octonaire + 1, avec un octonaire + 1, ou avec l'unité prise pour un nombre quarré, on aura un octonaire + 2, qui estant mesuré par 2, & non par son quar-
Def. 6. ré 4, sera un nombre impairement pair, & ne sera point quarré:
Prop 6. que si on assemble deux unitez, qui sont deux quarrez impairs, leur somme sera 2, qui est un nombre impairement pair, & non quarré.

CONSEQUENCE II.

Il suit de cette proposition, & de la cinquiéme, que tout quarré impair au de dessus l'unité, qui n'est point mesuré par 3, surpasse
Prop 37. *du* 7. *d'Eucl.* de l'unité un nombre mesuré par 24, puisqu'il surpasse de l'unité un multiple de 3, & un multiple de 8, & que le produit de ces deux nombres est mesure par 24.

LEM-

LEMME.

PROPOSITION VIII.

Tout quarré au dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou — 1.

DEMONSTRATION.

Tout nombre plus grand que le binaire qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou — 1 ou quinaire + ou — 2. *Prop. 3.*
S'il est quinaire + ou — 1, son quarré sera quinaire + 1, par un raisonnement semblable à celuy de la proposition cinquiéme.

S'il est quinaire + ou — 2, son quarré sera quinaire + 4, par le mesme raisonnement; ainsi le quarré de 5 A + 2, est $25\,A^2 + 20\,A + 4$, & le quarré de 5 A — 2 est $25\,A^2 - 20\,A + 4$: & il est évident que chacun de ces quarrez est quinaire + 4, mais un quinaire + 4 est quinaire — 1, & parce que 4 quarré du binaire est aussi quinaire — 1; il s'ensuit que tout quarré au dessus de l'unité qui n'est point mesuré par 5, est quinaire + ou — 1. ce qu'il falloit prouver. *Supp. 12.*

CONSEQUENCE.

De cette proposition il s'ensuit que tout quarré qui n'est point mesuré par 5, a pour son dernier chiffre ou caractere à main droite, l'un des quatre nombres, 1, 4, 6, 9; & que les nombres qui ont pour dernier chiffre un des quatre, 2, 3, 7, 8, ne sont point quarrez. La raison en est évidente, puis que le chriffre final de tout nombre mesuré par 5, estant 5 ou 0, les nombres qui ont pour dernier chiffre, 1, 4, 6, 9, sont differens par l'unité d'un nombre mesuré par 5, ce qui est nécessaire pour faire qu'ils soient quarrez: & que les nombres qui ont pour dernier chiffre l'un des quatre autres, en sont differens par 2, & par conséquent ne sont point quarrez par cette proposition huitiéme.

LEM-

LEMME.

POPOSITION IX.

Tout quarré quarré au dessus de l'unité, qui n'est point mesuré par 5, est quinaire +1.

DEMONSTRATION.

Supp. 3. Prop. 8.

PUIS que le quarré quarré n'est pas mesuré par 5, sa racine quarrée ne le sera pas aussi; & parce que cette racine est un quarré, elle sera quinaire + ou — 1, & son quarré, qui est un quarré quarré, sera quinaire + 1 par un raisonnement semblable a celuy de la cinquiéme proposition.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que le dernier chiffre de tout quarré quarré, qui n'est point mesuré par 5, est 1 ou 6. La raison est, que tout nombre mesuré par 5, a pour son dernier chiffre 5 ou 0, à quoi ajoûtant l'unité, on aura 1, ou 6; pour le dernier chiffre du quarré quarré, puisqu'il doit estre quinaire +1.

PROPOSITION X.

Si on prend deux Nombres inégaux quelconques, le double de leur produit, & la difference de leurs quarrez seront les deux costez d'un Triangle rectangle, & la somme des mesmes quarrez en sera l'hypotenuse.

E.	F.	G.
C.	H.	D.
A.		B.

DE-

DEMONSTRATION.

SOIENT A & B deux nombres donnez, dont A ſoit le plus grand, C le quarré de A, D le quarré de B, E la ſomme de ces deux quarrez, G leur difference, F le double produit de A par B: je dis que les trois nombres E, F, G, ſont les trois coſtez d'un Triangle rectangle; car ſoit H, le produit de A par B, d'autant que F eſt double de H, ſon quarré ſera quadruple du quarré de H; mais H eſtant moyen proportionnel entre C & D, ſon quarré ſera égal au produit de C par D; donc le quarré de F ſera quadruple du produit de C par D: mais quatre fois le produit de C par D, avec le quarré de G leur difference, eſt égal au quarré de leur ſomme E. Donc le quarré de F, avec le quarré de G, ſera égal au quarré de E; & par conſéquent les trois nombres E, F, G, ſeront les trois coſtez d'un Triangle rectangle, & E en ſera l'hypoténuſe. Ce qu'il falloit prouver. *Supp. 8.* *Def. 1.* *Def. 2.*

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

$A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, $2\,AB$, ſont les trois nombres E, G, F. le quarré de $A^2 + B^2$ eſt $A^4 + B^4 + 2\,A^2B^2$ le quarré de $A^2 - B^2$ eſt $A^4 + B^4 - 2\,A^2B^2$, qui eſtant joint au quarré de $2\,AB$, ſçavoir $4\,A^2B^2$, fait auſſi $A^4 + B^4 + 2\,A^2B^2$. On appellera ces nombres A & B, les générateurs du Triangle rectangle, qui ſera dit eſtre formé ou engendré par ces nombres; & le double de leur produit ſera appellé le coſté pair du Triangle, parce qu'il eſt toujours un nombre pair. *Supp. 12.*

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que ſi un nombre eſt composé de deux quarrez, la difference du quarré de ce nombre composé, & du quarré de la difference des meſmes quarrez, ſera le quarré du double produit

N de

de leurs racines, puiſque ces racines ſeront les nombres générateurs d'un Triangle, qui aura pour ſon hypoténuſe la ſomme de leurs quarrez.

EXEMPLE.

13 eſt composé des deux quarrez 9 & 4, dont les racines ſont 2 & 3: la difference de 169 quarré de 13, & de 25 quarré de 5 (difference de 9 & 4) eſt 144, qui eſt le quarré de 12, double produit de 3 par 2.

PROBLEME.

PROPOSITION XI.

Trouver trois nombres quarrez en progreſſion Arithmétique.

SOIENT A & B les deux coſtez d'un Triangle rectangle trouvé par le moyen de deux nombres, comme il a eſté enſeigné en la Propoſition précédente, & que C ſoit l'hypoténuſe de ce Triangle: je dis que ſi on prend les trois nombres A — B, A + B & C, leurs trois quarrez ſeront en progreſſion arithmétique. Car le quarré de A — B ſera $A^2 + B^2 - 2AB$, le quarré de C ſera $A^2 + B^2$, puis que ſon quarré eſt égal à la ſomme des quarrez de A & B, & le quarré de A + B ſera $A^2 + B^2 + 2AB$: & il eſt évident que ces trois quarrez ont pour difference 2 A B, double produit de A par B: ainſi le Triangle rectangle 5, 12, 13, eſtant donné, la difference de 5, & de 12, eſt 7, & leur ſomme 17, dont les quarrez ſont 49, & 289, & le quarré de l'hypoténuſe 13, eſt 169. Or les trois quarrez 49, 169, 289, ont pour difference commune 120, double produit de 5 par 12; & par conſéquent ces trois quarrez ſont en progreſſion arithmétique.

Supp. 12.

CON-

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que la difference du quarré de l'hypoténuse au quarré de la somme des deux costez, ou au quarré de leur difference, est quadruple de l'aire du Triangle; car les costez du Triangle estant A & B, l'aire sera $\frac{1}{2}$ A B; & la difference du quarré de l'hypoténuse, au quarré, soit de la somme, soit de la difference des deux costez, est 2 A B, qui est quadruple de $\frac{1}{2}$ A B. *Def.* 2.

PROPOSITION XII.

Si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle sont multipliez par un mesme nombre, les deux produits seront les générateurs d'un autre Triangle rectangle, qui sera multiple du premier, par le quarré du multipliant.

DEMONSTRATION.

SOIENT A & B les générateurs d'un Triangle rectangle, dont A soit le plus grand; & soient multipliez par quelconque nombre C, les produits seront C A, & C B: or les trois costez du Triangle qu'ils formeront, seront $C^2 A^2 + C^2 B^2$, $C^2 A^2 - C^2 B^2$, & $2 A B C^2$, qui sont multiples par C^2, des trois costez du premier Triangle $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, & 2 A B. *Prop.* 10.

EXEMPLE.

Soient 2 & 3 les générateurs du triangle 5, 12, 13, & soient multipliez 2 & 3 par 5; les produits seront 10 & 15, qui seront les générateurs du Triangle 325, 125, & 300, dont les costez sont multiples de 13, 5, 12, par 25 quarré du multipliant. Donc ce dernier Triangle sera multiple du premier par ce quarré. *Prop.* 10. *Def.* 5.

PROPOSITION XIII.

Si en un Triangle rectangle, deux des trois costez n'ont point de commune mesure autre que l'unité, le troisiéme costé n'en aura point. aussi avec aucun des deux autres, & le Triangle sera primitif. Et si deux des trois costez ont une commune mesure autre que l'unité, tous les trois auront la mesme mesure, & le Triangle sera composé.

DEMONSTRATION.

LA premiére partie de cette Proposition se démontre ainsi. Si le troisiéme costé avoit une commune mesure avec quelqu'un
Supp. 3. des autres costez, leurs quarrez l'auroient aussi, & pareillement
Supp. 7. la somme & la difference des mesmes quarrez. Or la somme, ou
Def. 1. la difference de ces quarrez, est le quarré de l'autre costé : donc ce troisiéme quarré auroit la mesme mesure ; & par conséquent les quarrez des deux costez qu'on a supposé premiers entre eux, auroient une commune mesure, & seroient composez entre eux: mais lors que deux quarrez sont composez entre eux, leurs costez
Eucl. 29. 7. sont aussi composez entre eux ; car s'ils estoient premiers entre eux, leurs quarrez le seroient aussi. D'où il s'ensuit que les deux costez qu'on a supposé premiers entre eux, seroient composez entre eux, ce qui est absurde.

Pour la seconde partie, si le troisiéme costé n'avoit pas une commune mesure avec l'un des deux autres, ces deux autres n'en auroient point aussi entre eux, par ce qui a esté dit en la premiere Partie: ce qui est contre l'hypothese. Donc si en un Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que si l'un des trois costez est un nombre premier, le Triangle sera primitif, puisque ce costé ne peut avoir de commune mesure avec les deux autres.

Que

Que si l'on dit que le moindre costé estant premier, il peut estre la commune mesure des deux autres, on prouvera qu'il est impossible; car l'hypoténuse seroit differente de l'autre costé par ce mesme nombre premier, ou par un multiple de ce premier; & en tous les deux cas, son quarré seroit plus grand que la somme des quarrez des deux autres costez, ce qui est absurde. *Supp.* 1.

PROPOSITION XIV.

Si on prend deux nombres quelconques premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair, le Triangle dont ils seront les générateurs sera primitif.

DEMONSTRATION.

SOIENT A & B premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair; je dis que le Triangle rectangle qu'ils formeront, sçavoir $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$ & $2\,AB$, sera primitif: car A & B estant premiers entre eux, leurs quarrez A^2 & B^2 seront aussi premiers entre eux; & leur somme $A^2 + B^2$, sera aussi nombre premier à chacun d'eux, & par conséquent à leurs racines A ou B, & à leur produit AB: mais $A^2 + B^2$ estant la somme d'un pair & d'un impair, sera un impair; donc il sera premier au nombre 2, & estant premier à AB, il sera premier à $2\,AB$, côté pair du Triangle, donc il sera aussi premier à l'autre costé $A^2 - B^2$, & les trois costez n'auront point de commune mesure entre eux, & par conséquent le Triangle sera primitif. Ce qu'il falloit prouver. *Prop.* 10. *Eucl. l.* 7. *Supp.* 5. *Eucl. l.* 7. *Prop.* 13. *Def.* 3.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que tout nombre composé de deux quarrez premiers entre eux, dont l'un est pair, & l'autre impair, est l'hypoténuse d'un Triangle primitif, qui aura pour son costé pair le double produit des deux racines de ces quarrez, & pour son costé impair

pair la difference de ces deux quarrez : car les racines de ces deux quarrez seront deux nombres premiers entre eux, dont l'un sera pair, & l'autre impair; & par conséquent le Triangle qu'ils formeront, sera primitif, par cette quatorziéme Proposition.

PROPOSITION XV.

Tout Triangle rectangle est primitif, ou multiple d'un primitif.

DEMONSTRATION.

Def. 3. Ou les trois costez du Triangle sont premiers entre eux, & en ce cas il sera primitif; ou ils seront composez entre eux. Soient divisez ces derniers par leur plus grande commune mesure;
Supp. 2. les trois quotiens seront les trois costez d'un Triangle rectangle;
Eucl. l. 7. & parce qu'ils seront premiers entre eux, le Triangle sera primitif; & par conséquent l'autre Triangle sera multiple de ce primitif par cette plus grande commune mesure. Donc tout Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

PROPOSITION XVI.

La moitié de la somme de deux nombres estant jointe à la moitié de leur difference, fait un nombre égal au plus grand des deux nombres; & la moitié de leur difference estant ostée de la moitié de leur somme, le reste sera le moindre des deux nombres.

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

Supp. 12. A & B sont les deux nombres, A + B est leur somme, & A — B leur difference; $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B joint à $\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B, fait le plus

plus grand nombre A; & $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B estant osté de $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B, fait le plus petit, sçavoir B.

CONSEQUENCE.

De là il s'ensuit que A + B joint à A — B, fait 2 A, & que A — B estant osté de A + B, le reste est 2 B.

LEMME.

PROPOSITION XVII.

Les quarrez de la somme & de la difference de deux nombres estant joints ensemble, font une somme égale au double de la somme des quarrez des mesmes nombres.

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

SOIT A le plus grand nombre & B le plus petit; leur somme sera A + B, & leur difference A — B; le quarré de A + B, sera $A^2 + B^2 + 2\,AB$; le quarré de A — B, sera $A^2 + B^2 - 2\,AB$: la somme de ces deux quarrez est $2\,A^2 + 2\,B^2$, qui est double de $A^2 + B^2$. Ce qui estoit à prouver. *Supp.* 12.

LEMME.

PROPOSITION. XVIII.

La difference de deux quarrez est le produit de la somme de leurs racines, par la difference des mesmes racines.

DE-

DEMONSTRATION.

ALGEBRIQUE.

A & B sont les racines, $A^2 - B^2$ est la difference de leurs quarrez, $A - B$ est la difference des racines, qui multi-
Supp. 12. pliant leur somme $A + B$, fait $A^2 + AB - AB - B^2$, & par reduction $A^2 - B^2$, nombre égal à la difference des quarrez des racines A & B. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE I.

Il s'ensuit que la moindre difference de deux quarrez est 3, puis que c'est le produit de la somme des deux moindres nombres 1 & 2, par leur difference 1, qui est le moindre de tous les nombres.

CONSEQUENCE II.

Il s'ensuit que si les nombres générateurs d'un Triangle rectangle, ont l'unité pour difference, leur somme sera le costé impair de ce Triangle.

PROPOSITION XIX.

En tout Triangle rectangle primitif, l'un des deux costez est pair, & l'autre impair, & l'hypoténuse est aussi un nombre impair.

DEMONSTRATION.

Si l'un des costez n'est pas pair, & l'autre impair, ils seront tous deux pairs, ou tous deux impairs. Ils ne peuvent estre tous deux pairs, car ils auroient deux pour commune mesure, & le Triangle ne seroit pas primitif contre l'hypothese. Ils ne peuvent estre tous deux impairs, parce que chacun de leurs quarrez
Prop. 7. seroit un quarré impair, & par conséquent octonaire + 1; donc la somme de ces quarrez, qui doit estre le quarré de l'hypoténuse,

ſe, ſeroit octonaire + 2, & ne ſeroit pas un nombre quarré : ce qui eſt abſurde. Il reſte donc que l'un des coſtez ſoit pair, & l'autre impair : or le quarré de l'un de ces coſtez ſera pair, & celuy de l'autre impair ; & par conſéquent leur ſomme, qui eſt le quarré de l'hypoténuſe, ſera un quarré impair : d'où il ſuit que l'hypoténuſe ſera un nombre impair. Ce qui eſtoit à prouver.

1. Conſ. Prop. 7.
Supp. 5.
Supp. 5.

PROPOSITION XX.

L'hypotenuſe de tout Triangle primitif eſt la ſomme de deux quarrez inégaux, & premiers entre eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair ; & le coſté impair du meſme Triangle eſt la difference des meſmes quarrez.

DEMONSTRATION.

Puis que l'hypoténuſe d'un Triangle primitif eſt un nombre impair, & qu'un des deux coſtez eſt auſſi impair, la ſomme de l'hypoténuſe & du coſté impair, & leur difference, ſeront des nombres pairs : mais parce que la difference des quarrez de l'hypotéuſe & du coſté impair eſt un quarré, ſçavoir le quarré du coſté pair, & que ce quarré eſt le produit de la ſomme & de la difference des deux autres coſtez qui ſont impairs ; cette ſomme & cette difference, qui ſeront des nombres pairs, ſeront entre elles comme quarré à quarré ; & leurs moitiez, qui ſeront des nombres entiers, ſeront auſſi entre elles comme quarré à quarré ; mais la ſomme de ces moitiez eſt l'hypoténuſe de ce Triangle, & la difference en eſt le meſme coſté impair : or ſi ces deux nombres (c'eſt à dire ces deux moitiez) avoient une commune meſure, elle meſureroit auſſi leur ſomme & leur difference, ſçavoir l'hypoténuſe, & le coſté impair de ce Triangle ; & par conſéquent ces nombres ſeroient compoſez entre eux, & le Triangle ne ſeroit pas primitif, contre l'hypotheſe. Donc ces deux nombres ſont premiers entre eux ; & parce qu'ils ſont entre eux comme quarré à quarré, ce ſeront deux quarrez premiers entre eux ; & puis que leur ſomme,

Prop. 19.
Supp. 5.
Def. 1.
Prop. 18.
Supp. 5.
Supp. 6.
Prop. 16.
Supp. 7.
Def. 3.
Supp. 11

Prop. 19. me, qui eſt l'hypoténuſe, eſt un impair, l'un ſera pair, & l'autre impair. Il a eſté auſſi prouvé que leur difference eſtoit le coſté impair de ce Triangle : donc l'hypoténuſe de tout Triangle primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE. I.

Il ſuit de cette propoſition que tout Triangle primitif a deux nombres générateurs premiers entre eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair : car d'autant que l'hypoténuſe de quelconque Triangle primitif, eſt la ſomme de deux quarrez premiers entre eux, dont l'un eſt pair, & l'autre impair ; leurs racines ſeront auſſi des nombres premiers entre eux, dont l'un ſera pair, & l'autre impair.
Prop. 14. Donc ces nombres ſeront les générateurs d'un Triangle primitif, qui ſera le meſme que celuy qui a pour hypoténuſe la ſomme de leurs quarrez.

CONSEQUENCE II.

Il s'enſuit auſſi que l'hypoténuſe de tout Triangle primitif ſurpaſſe de l'unité un quaternaire. Car puis qu'elle eſt la ſomme d'un
Prop. 20. quarré pair, & d'un impair, & que le quarré pair eſt 4, ou multiple de 4, & l'impair eſt l'unité, ou eſt octonaire + 1, cette
Prop. 4. & 7. ſomme ſurpaſſera de l'unité un quaternaire.

CONSEQUENCE III.

Il s'enſuit auſſi qu'il n'y a aucun Triangle rectangle primitif dont le coſté impair ſoit moindre que 3, le coſté pair moindre que 4, & l'hypoténuſe moindre que 5, puis que 4 & 1 ſont les moindres nombres quarrez, & leurs racines les deux moindres nombres.

PRO-

PROPOSITION XXI.

Si on prend deux nombres quelconques impairs & premiers entre eux, le Triangle dont ils seront les générateurs, sera double d'un primitif, & ces deux nombres seront la somme & la difference des deux nombres générateurs de ce primitif: & le costé, qui est la difference des quarrez de ces deux nombres impairs & premiers entre eux, sera double du costé pair du primitif, & leur double produit sera double de son costé impair.

DEMONSTRATION.

A..................E..................D..................B..................C

SOIENT AB & BC deux nombres impairs & premiers entre eux, dont AB soit le plus grand, & soit AD la difference de AB, BC: il est évident que AD sera un nombre pair, soit iceluy divisé en deux également, & soient AE, ED, les moitiez de ce nombre. *Supp. 5.*

D'autant que BD est égal à BC, & DE à EA; le nombre BE sera la moitié du nombre AC; le nombre AB sera la somme des deux nombres BE, & EA (ou ED): & le nombre DB (ou BC) en sera la difference: cela estant, je dis que AE, EB sont premier entre eux: car AB & BC estant premiers entre eux par l'hypothese, leur somme AC sera nombre premier à AB & à BC (ou BD) & EB moitié de AC, sera aussi premier à AB, & BD; *Eucl. 7.* donc il sera premier à DE, c'est à dire AE difference de EB, DB; donc AE, EB sont premiers entre eux. Il est encore évident que l'un de ces nombres est pair, & l'autre impair: car ils composent ensemble AB, qui est impair; & estant premiers entre eux, ils seront les générateurs d'un Triangle primitif. Je dis maintenant *Prop. 14.* que le Triangle formé par les deux nombres AB, BC, a ses trois costez doubles des trois costez du triangle formé par les deux nombres AE, EB, sçavoir l'hypoténuse de l'hypoténuse, le co-

 sté

ſté pair de l'impair du primitif, & l'autre coſté de ſon coſté pair. Car A B & B C eſtant la ſomme & la difference des deux nombres
Prop. 17. A E, E B, la ſomme des quarrez de A B, & de B C, ſera double de la ſomme des quarrez de A E, & E B, & ces deux ſommes ſont les hypoténuſes des deux Triangles. Il eſt encore évident que la
Prop. 18. difference des quarrez des nombres A B & B C, eſt un nombre égal au produit de leur ſomme A C par leur difference A D ; mais A D eſtant double de A E, & A C, de E B, le produit de A C par A D, ſera quadruple du produit de A E par E B, c'eſt à dire double du double produit A E par E B qui eſt le coſté pair du Triangle primitif ; & par conſéquent le coſté qui eſt la difference des quarrez de A B, B C ſera double du coſté pair du Triangle formé
Prop. 14. par A E, E B. Il eſt encore manifeſte que le coſté impair de ce triangle primitif eſt la difference des quarrez de B E, & A E; & par conſéquent eſt égal au produit de A B par D B, (ou B C.) Donc le double produit de A B par B C, qui eſt le coſté pair du Triangle formé par A B, B C, eſtant double du ſimple produit de A B par B Ç, ſera double du coſté impair du Triangle primitif. Donc ſi on prend deux nombres quelconques, &c. Ce qu'il falloit prouver.

La converſe de cette Propoſition eſt aiſée à prouver, ſçavoir que ſi un Triangle rectangle eſt double d'un primitif, c'eſt à dire multiple d'un primitif par deux, la ſomme & la difference des générateurs du primitif ſeront les générateurs de ce Triangle double, & ſeront impairs, & premiers entre eux ; car A E, E B, eſtant les générateurs du primitif, A B, B C, ſeront leur ſomme &
Supp. 5. leur difference : or ces derniers nombres ſont impairs. Ils ſont auſſi premiers entre eux ; car ſi A B avoit une commune méſure avec B C, ou B D, elle méſureroit auſſi le reſte A D, ce qui eſt abſurde ; puis que A B premier à A E eſtant impair, il ſera auſſi
Eucl. 7. premier au nombre 2, & par conſéquent il ſera auſſi premier à leur produit A D, égal à deux fois A E, & ſuivant ce qui a eſté prou-

prouvé cy-dessus, ces deux nombres A B, B C seront les générateurs de ce Triangle double du primitif; d'où il suit aussi que tout Triangle double d'un primitif a son hypoténuse composée de deux quarrez, & a deux nombres générateurs.

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

Soient A & B les nombres A E & E B; A + B sera A B, & A — B sera B C: or les trois costez du Triangle primitif seront $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, & 2 A B, & l'hypoténuse de l'autre Triangle sera la somme des deux quarrez $A^2 + B^2 + 2\,AB$, & $A^2 + B^2 - 2\,AB$; laquelle somme estant deux fois $A^2 + B^2$, elle sera double de l'autre hypoténuse $A^2 + B^2$; la difference des deux quarrez de A + B & de A — B est 4 A B double du costé pair de l'autre Triangle; car le moindre quarré $A^2 + B^2 - 2\,AB$ estant osté de $A^2 + B^2 + 2\,AB$, il reste 4 A B; & enfin le double produit de A + B par A — B sera $2\,A^2 - 2\,B^2$, double du costé impair du Triangle primitif, sçavoir $A^2 - B^2$. *Supp. 12.*

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit que l'hypoténuse d'un Triangle double d'un primitif est un nombre pair composé de deux quarrez impairs, & premiers entre eux.

PROPOSITION XXII.

Aux Triangles multiples d'un primitif par un quarré, l'hypoténuse est la somme de deux quarrez, & le costé qui est la difference de ces quarrez, est multiplié du costé impair du primitif, par le mesme quarré multiplicateur de ses trois costez.

DEMONSTRATION.

Puis que l'hypoténuse de tout Triangle primitif est la somme de deux quarrez, chacun de ces quarrez estant multiplié par *Prop. 20.*

 un

Supp. 4. un quarré, l'un & l'autre produit sera un quarré, & leur somme, qui est l'hypoténuse du Triangle multiple, sera la somme de deux quarrez. Mais le costé impair du primitif, qui est la difference des deux quarrez qui composent l'hypoténuse du primitif, estant

Supp. 9. multiplié par le mesme quarré, le produit sera la difference des deux quarrez qui composent l'hypoténuse multiple. Donc aux Triangles multiples, &c. Ce qu'il falloit prouver.

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

Soit $A^2 + B^2$ l'hypoténuse d'un primitif, son costé impair sera $A^2 - B^2$; si on multiplie ces nombres par C^2, l'hypoténuse du Triangle multiple sera $A^2 C^2 + B^2 C^2$ nombre composé de deux quarrez, & la difference de ces deux quarrez qui composent l'hypoténuse sera $A^2 C^2 - B^2 C^2$, produit de $A^2 - B^2$ par C^2, & par conséquent multiple du coste impair du primitif par C^2.

PROPOSITION XXIII.

Aux Triangles multiples d'un primitif par un double quarré, l'hypoténuse est composée de deux quarrez, & la difference de ces deux quarrez, qui est un des costez de ce Triangle, est multiple par le mesme double quarré du costé pair du primitif; comme aussi l'autre costé de ce multiple est multiple du costé impair du primitif par le mesme double quarré.

DEMONSTRATION.

Il a esté démontré en la vingtuniéme Proposition que le nombre 2, qui est un double quarré, multipliant les trois costez d'un primitif, l'hypoténuse de ce multiple sera composée de deux quarrez, & que leur difference, qui est un des costez de ce multiple, sera double du costé pair du primitif. Je dis encore que tout autre double quarré multipliant un primitif, le Triangle multiple qui en sera formé aura son hypoténuse composée de deux quarrez, &

& que l'un des costez en sera la difference, & sera multiple du costé pair du primitif par le mesme double quarré. Car puis que l'hypoténuse du primitif estant multipliée par 2, fait un nombre composé de deux quarrez; si la somme de ces deux quarrez est encore multipliée par un quarré, le produit sera encore la somme de deux quarrez: or c'est la mesme chose de multiplier un nombre par 2, & le produit par un quarré, que de multiplier ce nombre par un double quarré; & par conséquent les deux quarrez qui composent l'hypoténuse du primitif estant multipliez par un double quarré, seront une somme composée de deux quarrez, qui sera l'hypoténuse du multiple; & puis que le nombre 2 ayant multiplié le costé pair du primitif, produit la difference des deux quarrez qui composent l'hypoténuse du Triangle double du primitif; si cette difference est multipliée par le mesme quarré qui a multiplié l'hypoténuse double de celle du primitif, le produit sera la difference des deux quarrez qui composent l'hypoténuse du Triangle multiple de ce primitif par le mesme double quarré. Il est encore évident que si 2 multipliant le costé impair du primitif, produit le costé pair du Triangle double du primitif, le multiple de ce costé pair par un quarré sera multiple de l'impair du primitif par un double quarré, & sera aussi le costé pair de ce Triangle multiple. Donc aux Triangles multiples d'un primitif, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 21
Supp. 4.
Supp. 10.
Prop. 21.
Supp. 9.

Pour faciliter l'intelligence de ces Propositions, on donne les exemples suivans en nombres.

Exemples des Propositions 14, 21, 22, & 23.

2 & 5 sont deux nombres premiers entre eux, dont l'un est pair, & l'autre impair, générateurs du Triangle 29, 21, 20; le double de ce Triangle est 58, 42, 40; dont les générateurs sont 7 & 3, somme & difference de 5 & 2. 58 est composé des deux quarrez Prop. 10.

49

49 & 9; 42 double de 21 (qui eſt la difference des quarrez qui compoſent 29 hypoténuſe du primitif) eſt le double produit de 7 & 3; & 40, double de 20, coſté pair du primitif, eſt la difference des deux quarrez 49, & 9. Mais ſi on multiplie 58, 42, & 40, par le quarré 9, on aura 522, 378, 360, pour les trois coſtez d'un Triangle multiple, & ces coſtez ſeront les meſmes que ſi on avoit multiplié 29, 21, & 20, par le double quarré 18; & ce nombre 522, eſt la ſomme des produits de 49 & 9 par 9, dont la ſomme eſt 441 + 81, c'eſt à dire 522; & la difference de ces deux quarrez eſt 360, multiple de 20, coſté pair du primitif par le double quarré 18. Que ſi on avoit multiplié ces trois nombres, 29, 21, & 20, par un quarré comme 9, les produits ſeroient 261, 189, 180, qui ſeroient les coſtez d'un Triangle multiplie du primitif 29, 21, 20, par un quarré. Or l'hypoténuſe 261, eſt compoſée du produit de 25 par 9, & de celuy de 4 par 9, qui ſont des quarrez, dont la ſomme eſt 225 + 36; & leur difference 189, eſt multiple par le quarré 9 de 21, coſté impair du Triangle primitif, conformément à la Propoſition vingt-deuxiéme.

CONSEQUENCE.

Il ſuit des deux Propoſitions precedentes que les Triangles multiples d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré, ont des nombres générateurs: car puis qu'un de leurs coſtez eſt la difference des deux quarrez qui compoſent l'hypoténuſe, il s'enſuit (*Conſ. Prop. 10.*) que le quarré de ce coſté, & le quarré de l'hypoténuſe auront pour difference le quarré du double produit des deux nombres, dont lés quarrez compoſent l'hypoténuſe, & par conſéquent que ce double produit ſera l'autre coſté de ce Triangle multiple, (*Prop. 10.*) & que ces deux nombres ſeront les générateurs de ce Triangle multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré.

PRO-

PROPOSITION XXIV.

Tout Triangle qui a des nombres générateurs est primitif, ou multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré.

DEMONSTRATION.

Les générateurs sont composez entre eux, ou premiers entre eux : si les générateurs sont premiers entre eux, ou l'un d'eux sera pair, & l'autre impair, ou ils seront tous deux impairs. Au premier cas, le Triangle sera primitif, & au deuxiéme cas il sera double d'un primitif, c'est à dire multiple d'un primitif par 2, qui est un double quarré. Mais si les générateurs sont des nombres composez entre eux, ils ne seront pas les plus petits de leur raison, & ils seront également mésurez par deux nombres premiers entre eux, & en la mesme raison, chacun du sien ; c'est à dire qu'un mesme nombre multipliant ces deux nombres premiers entre eux, il produira ces deux composez entre eux. Soient donc ces deux nombrez composez entre eux AC & BC, & A & B soient les nombres premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair, qui estant multipliez par C, ont produit AC, & BC; le Triangle formé par AC, & BC, sera multiple par le quarré de C, du primitif formé par A & B. Que si A & B sont impairs, & premiers entre eux, AC & BC en seront aussi également multiples chacun du sien, & le Triangle qui en sera formé sera multiple par C^2, du Triangle formé par les deux impairs premiers entre eux. Et d'autant que ce dernier Triangle est double d'un primitif, l'autre sera multiple par un quarré du double d'un primitif, ou, ce qui est la mesme chose, il sera multiple d'un primitif par un double quarré. Donc tout Triangle qui a des nombres générateurs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Prop. 14. *Prop.* 21. *Excl.* 7. *Supp.* 12. *Prop.* 12. *Prop.* 14. *Supp.* 10.

PROPOSITION XXV.

Si un Triangle est multiple d'un primitif par un nombre non quarré, ny double quarré, il n'aura point de nombres générateurs; mais son hypoténuse sera composée de deux nombres, qui seront entre eux comme quarré à quarré, dont la difference sera le costé multiple de l'impair du primitif.

DEMONSTRATION.

Si ce Triangle avoit des nombres générateurs, il seroit primitif
Prop. 24. ou multiple d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré, ce qui est contre l'hypothese. Pour la seconde partie, soit $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, $2AB$ un Triangle primitif, & soit quelconque nombre C, non quarré, ny double quarré, par lequel le primitif soit multiplié; l'hypoténuse de ce multiple sera $CA^2 + CB^2$, qui seront entre eux
Supp. 4. comme quarré à quarré, parce que C multipliant deux quarrez, les produits seront en mesme raison l'un à l'autre que ces quarrez. Il est encore manifeste que le mesme nombre C, multipliant le costé impair du primitif, qui est la difference des quarrez A^2 &
Supp. 5. B^2, produira la difference de CA^2, & de CB^2. Donc si un Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PREMIERE REMARQUE.

On peut voir par ce qui est dit cy-dessus, & par ce qui a esté dit en la Proposition vingtiémé, qu'une mesme hypotenuse d'un mesme Triangle peut estre composée de deux nombres quarrez, dont la difference sera un des costez de ce Triangle, & de deux autres non quarrez, qui seront entre eux comme quarré à quarré, & qui auront pour difference l'autre costé du mesme Triangle: comme au Triangle 6, 8, 10, *double du primitif* 3, 4, 5, *l'hypotenuse* 10 *est le produit de* 2 *par* 5 (*ou* 4 + 1) *& ce produit est égal à la somme de* 8 *&* 2, *qui ne sont pas quarrez, mais*

mais sont entre eux comme quarré à quarré, & le mesme nombre 2 multipliant le costé impair 3, produit 6, qui est l'un des costez de ce Triangle double de l'impair du primitif, & est la difference des deux nombres 8, & 2: mais aussi ce mesme Triangle 6, 8, 10, a deux nombres générateurs 3 & 1, dont les quarrez 9 & 1 composent la mesme hypoténuse 10, & leur difference est 8, double du costé pair du primitif.

SECONDE REMARQUE.

Il est possible qu'un mesme nombre soit l'hypoténuse de plusieurs Triangles primitifs, & aussi de plusieurs Triangles multiples, qui n'ont point de nombres générateurs; comme 65 est l'hypoténuse des Triangles primitifs 65, 63, 16; 65, 33, 56, & aussi des Triangles multiples 65, 52, 39, & 65, 60, 25, qui n'ont point de nombres générateurs: mais chacun des costez impairs de ces derniers, ne sont pas la difference de deux nombres quarrez qui composent cette hypoténuse, mais de deux nombres qui sont entre eux comme quarré à quarré. Les générateurs du premier Triangle sont 1 & 8, du deuxiéme 4 & 7; mais le troisiéme est multiple de 3, 4, 5, par 13, & le quatriéme multiple de 5, 12, 13, par 5. Les nombres qui composent l'hypoténuse du troisiéme, sont 52 & 13, qui estant multiples de 4 & 1, sont entre eux comme quarré à quarré, & ceux qui composent l'hypoténuse du quatriéme sont 45 & 20, qui sont entre eux comme quarré à quarré: leurs costez multiples des impairs des primitifs sont 39, difference de 52 & 13; & 25, difference de 45 & 20. Et parce qu'on voit par induction, que beaucoup de nombres premiers qui excèdent de l'unité un nombre mesuré par 4, sont les hypoténuses d'un seul Triangle primitif, & qu'on n'en trouve point dans une très-grande suite de nombres qui n'ayent cette propriété, comme 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 101, & que 21 & 57, qui excèdent de l'unité un multiple de 4, mais qui ne sont pas nombres premiers, n'ont pas cette propriété, on peut conjecturer que cette règle est universelle. De mesme, parce qu'on trouve par induction que le produit de deux de ces

ces hypoténuses est l'hypoténuse de deux Triangles primitifs ; que le produit de trois de ces hypoténuses est l'hypoténuse de quatre Triangles primitifs ; que le produit de quatre de ces hypoténuses est l'hypoténuse de huit Triangles primitifs ; que le produit de cinq de ces hypoténuses est l'hypoténuse de seize Triangles primitifs, &c. on peut conjecturer que la progression des nombres de ces Triangles sera en raison double à l'infini, en multipliant toûjours la derniere hypoténuse par un nombre premier qui excède de l'unité un multiple de 4.

EXEMPLES.

1105 *produit des trois nombres* 5, 13, 17. 8177 *produit de* 13, 17, 37. & 3145 *produit de* 5, 17, 37, *sont chacun l'hypoténuse commune de quatre Triangles primitifs, comme on le voit en la Table suivante.*

1105		8177		3145	
1104,	47	7665,	2848	3127,	336
817,	744	4305,	6952	2263,	2184
943,	576	3375,	7448	1463,	2784
1073,	264	1905,	7952	553,	3096

32045, *produit de* 5, 13, 17, 29 ; & 40885, *produit de* 5, 13, 17, 37, *sont chacun l'hypoténuse de huit Triangles primitifs, comme on le voit en la Table suivante.*

COSTEZ DES TRIANGLES.

Hyp.		
	2277,	31964
	30956,	8283
32045,	27044,	17253
	24124,	21093
		23067,

23067,	22244
27813,	15916
31323,	6764
32037,	716

COSTEZ DES TRIANGLES.

	40723,	2636
	39917,	8844
	37523,	16236
HYP.	34387,	22116
40885,	26093,	31476
	19667,	35844
	14893,	38076
	11603,	39204

De mesme 237133, produit de 13, 17, 29, 37, est l'hypoténuse de huit Triangles primitifs, dont les générateurs sont en la Table suivante.

Générateurs.		Générateurs.	
62,	483	243,	422
93,	478	258,	413
98,	477	282,	397
138,	467	307,	378

Et on n'en trouvera point d'autres.

De mesme 1185665 produit des nombres premiers, 5, 13, 17, 29, 37, est l'hypoténuse de seize Triangles primitifs, comme on les voit en la Table cy-dessous avec leurs nombres générateurs.

Générateurs.		Costez des Triangles.	
64,	1087	1177473,	139136
103,	1084	1164447,	223304
176,	1076	1129887,	359384
191,	1072	1112703,	409504
236,	1063	1074273,	501736
281,	1052	1027743,	591224
292,	1049	1015137,	612616
359,	1028	927903,	738104
449,	992	782463,	890816
512,	961	661377,	984064
568,	929	540417,	1055344
601,	908	463263,	1091416
607,	904	448767,	1097456
664,	863	303873,	1146064
673,	856	279807,	1152176
743,	796	81567,	1182856

Hypoténuse commune
1185665.

Mais on trouvera aussi par induction que le produit de deux de ces nombres premiers qui excèdent de l'unité un multiple de 4, est l'hypoténuse de deux Triangles multiples; que le produit de trois de ces nombres est l'hypoténuse de neuf Triangles multiples; & que le produit de quatre de ces nombres est l'hypoténuse de trente-deux Triangles multiples, & non d'avantage.

EXEMPLES.

	COSTEZ.		COSTEZ.
13 5 65	60, 25 52, 39	17 5 85	77, 36 84, 13
17 13 221	171, 140 220, 21	29 5 145	116, 87 105, 100

1105

1105 *Produit de 5, 13, 17, est l'hypoténuse de neuf Triangles multiples; sçavoir,*

	1071,	272
	561,	952
	425,	1020
HYP.	884,	663
1105,	1001,	468
	1092,	169
	975,	520
	855,	700
	1100,	105

8177 *Produit de 13, 17, 37, est l'hypoténuse des neuf Triangles multiples suivans.*

COSTEZ.

	6327,	2380
	8140,	741
	7548,	3145
HYP.	7215,	2848
8177,	8073,	1300
	5577,	5980
	7735,	2652
	5423,	6120
	527,	8160

2405 *Produit de 5, 13, 37, eſt l'hypoténuſe des neuf Triangles multiples ſuivans.*

	COSTEZ.	
	2220,	925
	1924,	1443
	2331,	592
HYP.	1221,	2072
2405,	1595,	1800
	155,	2400
	2275,	780
	1989,	1352
	2288,	741

3145 *Produit de 5, 17, 37, eſt l'hypoténuſe des neuf Triangles multiples ſuivans.*

	COSTEZ.	
	2849,	1332
	3108,	481
	2516,	1887
HYP.	2775,	1480
3145,	2601,	1768
	669,	2992
	2975,	1020
	3105,	500
	2145,	2300

Ta-

Table des trente-deux Triangles multiples dont 40885 *produit de* 5, 13, 17, 37, *est l'hypoténuse commune.*

COSTEZ DES TRIANGLES.

	40749,	3332
	34221,	22372
	31059,	26588
	8211,	40052
	37740,	15725
	32708,	24531
	39627,	10064
	20757,	35224
	27115,	30600
	2635,	40800
	33813,	22984
	12597,	38896
Hyp.	40651,	4368
40885,	29419,	28392
	19019,	36192
	7189,	40248
	37037,	17316
	40404,	6253
	36075,	19240
	40365,	6500
	27885,	29900
	40848,	1739
	30229,	27578
	34891,	21312
	39701,	9768
	31635,	25900

Q 40700,

40700,	3885
38325,	14240
21525,	34760
16875,	37240
38675,	13260
9525,	39700

Et puis qu'un de ces nombres premiers, comme 5, ou 13, n'est l'hypoténuse que d'un seul Triangle primitif, & ne l'est d'aucun multiple; que le produit de deux de ces nombres est l'hypoténuse de quatre Triangles tant primitifs que multiples; que le produit de trois de ces nombres est l'hypoténuse de treize Triangles, & celuy de quatre de ces nombres de quarante Triangles, lesquels nombres 1, 4, 13, 40, sont l'aggrégé des nombres de suitte en progression triple 1, 3, 9, 27, on peut conjecturer que cette progression peut aller à l'infini, selon les nombres en progression triple, sçavoir 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. & que par consequent 1185665, sera l'hypoténuse de cent vingt-un Triangles, y compris les seize primitifs, lequel nombre 121 est la somme de 1, 3, 9, 27, 81, & que 48612265, produit des six nombres premiers 5, 13, 17, 29, 37, & 41, sera l'hypoténuse de trois cens soixante-quatre Triangles, y compris trente-deux primitifs. On pourra chercher ces Triangles, si l'on veut, ou mesme la démonstration de ces propriétez, qui apparemment est très-difficile à trouver: car de mesme que pour démontrer les Propositions précedentes, & les suivantes touchant les propriétez des Triangles rectangles en nombres, il a fallu trouver d'autres Theorémes que ceux des trois Livres des nombres d'Euclide; on peut croire qu'il en faudra encore d'autres pour parvenir à bien démontrer la pluspart des propriétez expliquées en cette remarque, hormis la propriété d'un seul de ces nombres premiers, qui est facile à demontrer: car puis que 13, par exemple, est un nombre premier, il ne peut estre l'hypoténuse d'un Triangle multiple, puis qu'il seroit mésuré par le nombre qui auroit multiplié l'hypoténuse du primitif, & par conséquent ne seroit pas premier contre l'hypothese.

PRO-

PROPOSITION XXVI.

En tout Triangle rectangle, un des deux costez est mésuré par trois.

DEMONSTRATION.

Si aucun des deux costez n'estoit mésuré par trois, leurs quarrez ne le seroient pas aussi : ces quarrez seroient donc ternaires $+1$, & leur somme seroit ternaire $+2$; qui par conséquent ne seroit pas un nombre quarré; ce qui est absurde, puis qu'elle doit estre le quarré de l'hypoténuse. Donc en tout Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver. *Supp. 5.* *Prop. 54* *Def. 1. & Supp. 1.*

PROPOSITION XXVII.

L'hypoténuse d'un Triangle primitif ne peut estre mesurée par trois.

DEMONSTRATION.

Si l'hypoténuse estoit mesurée par trois, l'un des deux costez estant mesuré par trois par la précedente, l'autre costé le seroit aussi, & les trois costez auroient une commune mésure; & le Triangle ne seroit pas primitif contre l'hypothese. Donc l'hypoténuse d'un Triangle primitif, &c. Ce qui estoit à prouver. *Prop. 13.*

PROPOSITION XXVIII.

En tout Triangle rectangle, un des costez est mésuré par quatre.

DEMONSTRATION.

D'autant que dans les Triangles primitifs le costé pair est le double produit d'un nombre pair, & d'un impair; & que le simple produit, qui est pair, est mésuré par deux; il s'ensuit que le double produit sera mésuré par quatre. Or dans les Triangles multiples, un de leurs costez estant multiple du costé pair du *Prop. 14.*

primitif, ce costé multiple sera aussi mésuré par quatre, puis qu'un nombre multiple d'un nombre mésuré par quatre, est aussi nécessairement mésuré par quatre. Donc en tout Triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

Il s'ensuit qu'il n'y a aucun Triangle rectangle dont chacun des costez soit un nombre premier.

PROPOSITION XXIX.

Tout Triangle rectangle a un de ses trois costez mésuré par cinq.

DEMONSTRATION.

Prop. 8. SI un des deux moindres costez est mésuré par cinq, la Proposition est veritable.

S'il n'y a aucun de ces deux costez qui soit mésuré par cinq, leurs quarrez seront differens de l'unité d'un nombre mésuré par cinq, & chacun d'eux sera quinaire + 1, ou quinaire — 1; ou l'un sera quinaire + 1, & l'autre quinaire — 1.

Ces quarrez ne peuvent estre tous deux quinaires + 1, ou tous
Supp. 1. deux quinaires — 1, parce que leur somme seroit quinaire + 2, ou quinaire — 2, & ainsi elle ne seroit pas un quarré, comme il est requis.

Il reste donc que l'un de ces quarrez soit quinaire + 1, & l'autre quinaire — 1; & en ce cas leur somme, qui est le quarré de l'hypoténuse, sera mésurée par 5, parce que 5 + 1 adjoûté à 5
Supp. 3. — 1, fait un quinaire: donc sa racine qui est l'hypoténuse sera mesurée par 5. Il est donc necessaire qu'un des trois costez d'un Triangle rectangle soit mésuré par cinq. Ce qui estoit à prouver.

PRO-

PROPOSITION XXX.

L'aire de tout Triangle rectangle est mésurée par six.

DEMONSTRATION.

Ou l'un des costez est mésuré par trois, & l'autre par quatre, ou un seul est mésuré par trois & par quatre. Si l'un des costez est mésuré par trois, & l'autre par quatre 4, leur produit sera mésuré par douze; & par conséquent l'aire du Triangle qui en est la moitié sera mésurée par 6. Mais si l'un des costez est mésuré par 3 & par 4, ce costé sera aussi mésuré par 12 : donc son produit par l'autre costé, quel qu'il soit, sera mésuré par 12; & l'aire du Triangle en ce second cas sera aussi mésurée par six. Ce qui estoit à prouver. *Prop.* 26. & 28.

PROPOSITION XXXI.

L'aire de tout Triangle multiple, est multiple de celle de son primitif par un quarré; & la racine de ce quarré est le nombrre par lequel le primitif a esté multiplié, pour faire le Triangle multiple.

DEMONSTRATION.

Parce que le Triangle primitif a un nombre pair pour un de ses costez; que ce costé soit 2 A, & l'autre soit B; son aire sera AB. Si ces deux costez sont multipliez par C, on aura un Triangle multiple, dont les costez seront 2 AC, & BC, & l'aire sera ABC², qui est multiple de l'aire du primitif, sçavoir AB par C², dont la racine C est le nombre par lequel le primitif a esté multiplié : ce qui procède de ce que deux nombres, comme A & B, estant multipliez par un nombre comme C, les deux produits se multiplians feront un nombre qui sera aussi le produit de A, C, B, C, se multipliant en quelque ordre que ce soit. Si donc on multiplie C par C, on aura C², qui multipliant AB, *Prop.* 10. *Sup.* 2. *Supp.* 10.

 pro-

produit de A par B, ce produit sera ABC^2.

CONSEQUENCE I.

Il s'ensuit que si l'aire d'un Triangle primitif n'est point un nombre quarré, celle de son multiple ne le sera point aussi; puis que C^2 estant multiplié par A B, aire du Triangle primitif, le produit ABC^2 ne sera pas quarré, si AB n'est pas un quaré. *Supp.* 4.

CONSEQUENCE II.

De mesme, si l'aire d'un Triangle primitif n'est pas double d'un nombre quarré, pas un des multiples de ce Triangle n'aura un double quarré pour son aire : car soient 4 A & B les costez du Triangle primitif, l'aire sera 2 A B, & les costez estant multipliez par C, l'aire du multiple sera $2\,ABC^2$. Or il est évident que si 2 AB n'est pas double quarré, $2\,ABC^2$ ne le sera pas aussi; car A B ne sera pas un quarré, ny par conséquent ABC^2: donc $2\,ABC^2$ ne sera pas un double quarré. *Supp.* 4.

PROPOSITION XXXII.

En tout Triangle primitif la somme & la difference de l'hypoténuse, & du costé impair, sont chacun un double quarré.

DEMONSTRATION.

Soit $A^2 + B^2$ l'hypoténuse d'un Triangle primitif, & $A^2 - B^2$ le costé impair, il est évident que la somme de ces deux nombres est $2\,A^2$, double du quarré A^2, & leur difference $2\,B^2$, double du quarré B^2. *Supp.* 12.

CONSEQUENCE.

On fera voir par le mesme raisonnement, qu'aux Triangles multiples d'un primitif par un quarré, ou par un double quarré,

ré, la somme de l'hypoténuse, & d'un des costez, font ensemble un double quarré, & que leur difference est aussi un double quarré, parce qu'en ces Triangles l'hypoténuse est la somme de deux quarrez: mais dans tous les autres multiples la somme & la difference de l'hypoténuse, & du costé multiple de l'impair du primitif, seront entre eux comme double quarré à double quarré; parce que deux doubles quarrez estant multipliez par le mesme nombre qui à multiplié les costez du primitif, les produits demeureront toujours en la raison de double quarré à double quarré; comme au Triangle 9, 12, 15, multiple du primitif 3, 4, 5; 24 & 6, somme & difference du costé 9, & de l'hypoténuse 15, sont entre eux comme 8 & 2, desquels ils sont mutiples par le nombre 3, non quarré, ny double quarré. Or 3 multipliant 4 + 1 ou 5, fait l'hypoténuse 15 composée des deux nombres 12 & 3, qui sont entre eux comme quarré à quarré, sçavoir comme 1 à 4, & le costé 9 en est la difference; & la somme de l'hypoténuse 5, & du coste impair 3, estant 8, qui est un double quarré, & leur difference estant 2, qui est aussi un double quarré, les produits de ces nombres par 3, sçavoir 24 & 6, seront encore en la mesme raison de 8 à 2, c'est à dire, de double quarré à double quarré: ce qui estoit à prouver. *Prop. 22 & 23.*

PROPOSITION XXXIII.

En tout Triangle primitif la somme & la difference de l'hypoténuse, & du costé pair, sont chacun un nombre quarré; & la racine du plus grand de ces quarrez est la somme des deux nombres générateurs du Triangle, & la racine du moindre en est la difference.

DEMONSTRATION.

ALGEBRIQUE.

A & B soient les nombres générateurs de quelconque Triangle primitif, l'hypoténuse sera $A^2 + B^2$, & le costé pair 2 AB, *Prop. 10.*
dont

Supp. 12. dont la ſomme eſt égale au quarré de A + B, ſomme des deux générateurs, & leur difference, ſçavoir $A^2 + B^2 - 2AB$, ſera le quarré de A — B, difference des générateurs A & B. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCE.

LA meſme choſe arrivera aux Triangles multiples d'un primitif par un quarré, & par un double quarré, ſçavoir que la ſomme de l'hypoténuſe, & du coſté pair, ſera un quarré, par ce qu'ils ont deux nombres générateurs, par la conſéquence des vingt-deux & vingt-troiſiéme Propoſitions. Mais cette ſomme & cette difference dans les Triangles multiples d'un primitif, par un nombre qui n'eſt pas quarré, ny double quarré, ſeront l'une à l'autre comme quarré à quarré; ce qui ſe prouvera par les meſmes raiſons de la conſéquence de la Propoſition précedente.

PROPOSITION XXXIV.

Si le coſté pair & l'hypoténuſe d'un Triangle primitif ſont les générateurs d'un autre Triangle, il ſera primitif, & ſon coſté impair ſera un quarré. Et ſi le coſté impair d'un Triangle primitif eſt un nombre quarré, l'hypoténuſe de ce Triangle ſera compoſée de deux quarrez, dont l'un aura pour racine l'hypoténuſe d'un deuxiéme Triangle primitif, l'autre aura pour racine le coſté pair du meſme deuxiéme Triangle, & la racine du quarré, qui eſt le coſté impair du premier Triangle, ſera le coſté impair du deuxiéme Triangle.

DEMONSTRATION.

Prop. 20. PARCE que le coſté impair de tout Triangle primitif eſt la difference de deux quarrez premiers entre eux, dont la ſomme eſt l'hypoténuſe du meſme Triangle; ſi ce coſté impair eſt un nombre quarré, on aura deux quarrez premiers entre eux, qui joints enſemble feront un troiſiéme quarré; & les racines de ces trois

trois quarrez feront les trois coftez d'un deuxiéme Triangle primitif. *Def.* 1.

La premiére partie, qui eft la converfe de la deuxiéme, fe démontre en cette forte. Les quarrez du cofté pair & de l'hypoténufe ont pour difference le quarré de l'impair; ce quarré fera donc le cofté impair du deuxiéme Triangle, qui fera primitif, puis que les générateurs font un pair & un impair premiers entre eux. *Prop.* 14.

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

Que le cofté impair du triangle foit $A^2 - B^2 = Z^2$ donc $Z^2 + B^2 = A^2$ & on aura un deuxiéme Triangle, dont les trois coftez feront A, B, Z, duquel A fera l'hypoténufe, & Z en fera le cofté impair, puis que fon quarré eft le cofté impair du premier Triangle. Il reftera donc B pour le cofté pair du deuxiéme Triangle: donc l'hypoténufe du premier Triangle $A^2 + B^2$, eft compofée de deux quarrez, dont les racines A & B font l'hypoténufe, & le cofté pair d'un deuxiéme Triangle, & Z racine du quarré, qui eft le cofté impair du premier Triangle par l'hypothefe, fera le cofté impair du deuxiéme; & il eft évident que ces deux nombres A & B font premiers entre eux, & par la quatorziéme Propofition le Triangle, dont ils feront les générateurs, fera primitif.

EXEMPLE.

Soit le Triangle 9, 40, 41, dont les nombres générateurs font 4 & 5, & le cofté impair 9 eft quarré. Parce que l'hypoténufe 41 eft la fomme des deux quarrez 25 & 16, dont 9 cofté impair eft la difference, & que cette difference eft un quarré; il s'enfuit que ce quarré joint au moindre quarré des deux qui compofent l'hypoténufe, fçavoir 16, fera un autre nombre quarré

25; & par conſéquent les trois racines de ces trois quarrez ſeront les trois coſtez d'un Triangle rectangle, ſçavoir 3, 4, 5, dont le plus grand 5, ſera l'hypoténuſe.

PROPOSITION XXXV.

Si le coſté pair d'un Triangle primitif eſt un double quarré, les nombres générateurs de ce Triangle ſeront des nombres quarrez, & l'hypoténuſe ſera la ſomme de deux quarrez quarrez.

DEMONSTRATION.

Prop. 10. PARCE que le coſté pair d'un Triangle primitif eſt le double du produit des racines des quarrez qui compoſent l'hypoténuſe; ſi ce double produit eſt un double quarré, ſa moitié ſera
Supp. 4. & 11. un nombre quarré, qui ne peut eſtre produit que par deux nombres quarrez, ou par deux nombres plans ſemblables: mais parce
Conſ. Prop. 14. que ces nombres ſont les générateurs d'un Triangle primitif, ils ſeront premiers entre eux, & par conſéquent ils ſeront nombres
Supp. 11 quarrez; & leurs quarrez, dont la ſomme eſt l'hypoténuſe de ce Triangle, ſeront des quarrez quarrez: ainſi parce que 72 double du quarré 36 eſt le coſté pair du Triangle primitif 65, 72, 97; l'hypoténuſe 97 doit eſtre compoſée de deux quarrez quarrez, qui ſont 81 & 16, à cauſe que 36, moitié du coſté pair eſtant un quarré, il ne peut eſtre produit par deux nombres s'ils ne ſont quarrez
Supp. 11. comme 4 & 9, puis que le coſté pair eſt le double du produit des deux nombres générateurs du Triangle, qui doivent eſtre premiers entre eux, & que les quarrez de ces deux quarrez, qui ſont les quarrez quarrez 81 & 16, compoſent l'hypoténuſe 97.

CONSEQUENCE.

Il s'enſuit que tout nombre compoſé de deux quarrez quarrez eſt l'hypoténuſe d'un Triangle, dont le coſté pair eſt un double quar-

quarré ; car les racines de ces quarrez quarrez, qui ſont des quarrez, ſeront les générateurs du Triangle : la ſomme de leurs quarrez, qui ſont des quarrez quarrez, en ſera l'hypoténuſe, & le coſté pair ſera le double de leur produit ; lequel produit eſtant quarré, ce double produit ſera double quarré.

EXEMPLE.

Le nombre 97, qui eſt composé des deux quarrez 16 & 81, eſt l'hypoténuſe du Triangle primitif 65, 72, 97, dont les générateurs ſont 4 & 9, & le coſté pair eſt 72, double du quarré 36, produit de 4 & 9 ; & quoy que 36 ſoit auſſi le produit de deux autres quarrez 36 & 1, il ſera facile de connoiſtre quels ſont les générateurs du Triangle donné, parce que la difference de l'hypoténuſe & du coſté impair eſt toûjours double du moindre des deux quarrez quarrez ; & par conſéquent 32 eſtant cette difference, ſa moitié 16 ſera ce quarré quarré, dont la racine 4 eſt l'un des générateurs du Triangle. *Prop. 32.*

PROPOSITION XXXVI.

La difference de deux quarrez quarrez eſt le produit de l'hypoténuſe d'un Triangle, par l'un des coſtez du meſme Triangle.

DEMONSTRATION.

Le produit de la ſomme de deux nombres par leur difference eſt la difference des quarrez de ces nombres : donc ſi deux nombres ſont des quarrez, le produit de leur ſomme par leur difference ſera la difference de leurs quarrez, qui ſont de quarrez quarrez. Mais ces quarrez ſont inégaux, puis que leurs quarrez quarrez ont une difference ; & par conſéquent leur ſomme ſera l'hypoténuſe d'un Triangle, & leur difference en ſera l'un des coſtez. Donc la difference de deux quarrez quarrez, &c. Ce qu'il falloit prouver. *Prop. 18.* *Prop. 10.*

PROPOSITION XXXVII.

En tout Triangle, auquel l'hypoténuse est la somme de deux quarrez, le produit de l'hypoténuse par le costé qui est la difference des quarrez qui la composent, est la difference de deux quarrez quarrez, dont les racines quarrées quarrées sont les générateurs du Triangle.

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE.

$A^2 + B^2$ est l'hypoténuse d'un Triangle rectangle; $A^2 - B^2$, le
Supp. 12. costé qui est la difference de A^2 & B^2; leur produit $A^4 - B^4$ est la difference des quarrez quarrez A^4 & B^4, dont les racines quarrées quarrées sont A & B, qui sont les générateurs du Triangle. Or il est évident que la difference des quarrez de A^2 & B^2 est le
Prop. 18. produit de leur somme $A^2 + B^2$, par leur difference $A^2 - B^2$. Mais les quarrez de A^2 & B^2 sont des quarrez quarrez, dont les racines quarrées sont A & B: donc le produit de $A^2 + B^2$ par $A^2 - B^2$ sera la difference de deux quarrez quarrez, dont les racines quarrées quarrées seront les nombres générateurs du Triangle. Ce qui estoit à prouver.

PROPOSITION XXXVIII.

Si dans un Triangle primitif l'hypoténuse estoit un nombre quarré, & pareillement le costé pair un nombre quarré; la racine de cette hypoténuse seroit l'hypoténuse d'un autre Triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son costé impair, & un double quarré pour son costé pair.

DEMONSTRATION.

Prop. 19. PARCE que le costé pair d'un Triangle primitif est le double produit des nombres générateurs du Triangle; si ce double pro-

produit estoit un nombre quarré, le simple produit seroit un dou-
ble quarré, qui ne peut estre fait que par un quarré, & par un Supp. 11.
double quarré, ou par deux nombres qui soient entre eux comme
quarré à double quarré: mais parce que le Triangle est supposé
primitif, le générateur impair sera un quarré, & l'autre généra-
teur un double quarré; car l'impair ne peut estre double quarré:
& parce que les quarrez de ces nombres qui seroient premiers en-
tre eux, estant joints ensemble, feroient l'hypoténuse, il s'ensuit
que l'hypoténuse seroit la somme d'un quarré quarré, & d'un
quarré dont la racine seroit un double quarré: mais l'hypoténuse
estant un quarré par l'hypothese, on auroit deux quarrez qui fe-
roient un quarré, & les racines de ces trois quarrez seroient des Eucl. l. 7.
nombres premiers entre eux, & feroient l'hypoténuse, & les deux
costez d'un autre Triangle, dont le costé impair seroit un quarré,
& l'autre un double quarré. Donc si dans un Triangle primitif,
tant l'hypoténuse que le costé pair estoient des quarrez, il en pro-
viendroit un autre Triangle primitif moindre, dont le costé im-
pair seroit un quarré, & le costé pair un double quarré. Ce
qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XXXIX.

Il n'y a aucun Triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un nombre quarré.

DEMONSTRATION.

SOIT premierement quelconque Triangle primitif. Je dis que
son aire ne peut estre un quarré. Car afin qu'il eust un quar-
ré pour son aire, il faudroit que de ses deux costez, l'un fût quar-
ré, sçavoir l'impair, car il ne peut estre double quarré, & l'au-
tre double quarré. Or dans ce Triangle primitif, le costé impair
estant quarré, les nombres générateurs du Triangle seroient l'hy- Prop. 34.
poténuse, & le costé pair d'un deuxiéme Triangle primitif; &

parce que le costé pair du premier seroit un double quarré, ces
Prop. 35. mesmes nombres générateurs du premier Triangle seroient quarrez. Donc l'hypoténuse, & le costé pair de ce deuxiéme Triangle seroient des quarrez; & ce Triangle seroit moindre que le premier, puis que deux de ses costez seroient les générateurs de ce
Prop. 38. premier. Mais par la precedente, la racine de l'hypoténuse de ce deuxiéme Triangle seroit l'hypoténuse d'un troisiéme Triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son costé impair, & un double quarré pour son costé pair; & ce troisiéme Triangle seroit encore moindre que le deuxiéme: or ce troisiéme Triangle auroit aussi pour son aire un nombre quarré. D'où il s'ensuit que supposant un Triangle rectangle primitif, dont l'aire soit un nombre quarré, on en trouvera un troisiéme en nombres entiers par une conséquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit aussi un quarré pour son aire; & que par les mesmes raisons ce troisiéme en donneroit encore un cinquiéme plus petit, qui seroit aussi primitif, & par conséquent en nombres entiers, & ainsi à l'infini, en diminuant toûjours. Mais cette conséquence est absurde; car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en descendant, puis qu'ils commencent par l'unité, & s'y terminent; & par conséquent il est impossible que l'aire d'un Triangle rectangle *primitif soit* un nombre quarré. Il a esté aussi prouvé par la conséquence de la Proposition trente-uniéme, que si l'aire d'un primitif n'est pas un nombre quarré, celle de son multiple ne sera pas aussi un quarré. Donc il n'y a aucun Triangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XL.

Il n'y a aucun Triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un double quarré.

DE-

DEMONSTRATION.

SI un Triangle primitif avoit un double quarré pour son aire, il faudroit que chacun de ses moindres costez fust un nombre quarré, afin que la moitié de leur produit, qui est l'aire du Triangle, fust un double quarré: mais chacun de ces costez ne peut estre un quarré; car le costé impair estant un quarré, les nombres générateurs de ce Triangle seroient l'un l'hypoténuse, & l'autre le costé pair d'un deuxiéme Triangle primitif moindre que le premier; & parce que le costé pair du premier est aussi supposé estre un quarré, & que ce costé pair est le double produit de deux nombres générateurs du premier Triangle; l'un de ces nombres générateurs seroit un quarré, & l'autre un double quarré, puis qu'ils doivent estre premiers entre eux. Or ces mesmes nombres sont l'hypoténuse & le costé pair du deuxiéme Triangle: donc ce second Triangle, qui doit estre primitif, auroit un quarré pour son hypoténuse, & un double quarré pour son costé pair; puis que l'hypoténuse estant un impair, ne peut estre un double quarré; d'où il s'ensuivroit que l'hypoténuse de ce second Triangle seroit la somme de deux quarrez quarrez. Et parce que cette hypoténuse doit estre un nombre quarré, on auroit un quarré qui seroit la somme de deux quarrez quarrez; & les racines de ces trois quarrez seroient les trois costez d'un troisiéme Triangle primitif moindre que les precedens, qui auroit un quarré pour chacun de ses moindres costez, & par conséquent son aire seroit un double quarré, comme du premier Triangle qu'on a supposé avoir un double quarré pour son aire. Et parce que de ce premier Triangle proviendroit ce troisiéme beaucoup moindre, qui seroit aussi primitif, & qui auroit un double quarré pour son aire; & que de ce troisiéme, par les mesmes raisons, il en proviendroit un cinquiéme encore moindre, qui seroit aussi primitif, & par conséquent en nombres entiers; on conclura par un raisonnement

Supp. 11. *Prop.* 34. *Prop.* 10. *Supp.* 11. *Prop.* 34. *Prop.* 20. *Prop.* 35. *Def.* 1.

nement semblable à celuy de la Proposition precedente, qu'il n'y a aucun Triangle rectangle primitif en nombres dont l'aire soit un double quarré. Mais par la deuxiéme conséquence de la Proposition trente-uniéme, si l'aire d'un primitif n'est pas un double quarré, celle d'aucun des Triangles multiples de ce primitif, ne sera un double quarré. Donc il n'y a aucun Triangle rectangle en nombres, dont l'aire soit un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

CONSEQUENCES DES DEUX DERNIERES PROPOSITIONS.

Conséquences de la XXXIX.

I.

IL n'y a point de Triangle rectangle auquel l'un des moindres costez soit un nombre quarré, & l'autre un double quarré; car son aire seroit un quarré: ce qui a esté prouvé impossible.

I I.

Il n'y a point de Triangle rectangle auquel, tant l'hypoténuse, que le costé pair, soit un nombre quarré; parce que de ce Triangle il en proviendroit un autre, dont le costé impair seroit quarré, & le pair un double quarré; & par conséquent son aire seroit un quarré.

Prop. 38.

I I I.

Un quarré estant joint à un quarré, dont la racine soit un double quarré, ne peut faire un quarré; car si cette somme estoit un quarré, les racines de ces deux quarrez seroient les deux costez d'un Triangle, dont l'un seroit un quarré, & l'autre un double quarré: ce qui est contre la premiere Conséquence.

I V.

IV.

Un quarré quarré impair ne peut estre la somme d'un quarré quarré pair, & d'un quarré impair; car les trois racines de ces trois quarrez feroient un Triangle rectangle, dont l'hypoténuse & le costé pair seroient quarrez, ce qui est contre la deuxiéme Conséquence; & par la mesme deuxiéme Conséquence un quarré impair ne peut estre la difference de deux quarrez quarrez.

V.

Il s'ensuit aussi que la difference du quarré de l'hypoténuse d'un Triangle au quarré tant de la somme que de la difference des deux costez du Triangle, ne pourra estre un nombre quarré; car puis que cette difference est quadruple de l'aire du Triangle, & que cette aire ne peut estre un quarré, cette difference ne pourra estre un quarré, puis que le produit de 4, qui est un quarré, par un nombre non quarré, ne peut estre quarré. *Conf. Prop.* 11. *Supp.* 4.

VI.

Il est encore manifeste qu'il n'y a point de Triangle rectangle primitif dont l'hypoténuse estant un quarré, le costé impair soit aussi un quarré; car le produit de ces deux quarrez seroit la difference de deux quarrez quarrez, qui composeroient l'hypoténuse d'un Triangles rectangle, dont les générateurs seroient des nombres quarrez, & le costé impair seroit cette difference: or le costé pair de ce dernier Triangle seroit un double quarré, & le costé impair un quarré; ce qui est contre la premiére Conséquence. *Prop.* 37. *Supp.* 4.

Consequence de la Proposition XL.

I.

Il n'y a aucun Triangle rectangle qui ait un quarré pour chacun

S de

de ſes moindres coſtez, car l'aire ſeroit un double quarré.

II.

Un quarré ne peut eſtre la ſomme de deux quarrez quarrez, parce que les racines de ces trois quarrez ſeroient les trois coſtez d'un Triangle, auquel chacun des deux moindres coſtez ſeroit un quarré, contre la premiére Conſéquence.

III.

Il n'y a aucun Triangle rectangle primitif qui ait un quarré pour ſon hypoténuſe, & un double quarré pour ſon coſté pair, parce que l'hypoténuſe ſeroit la ſomme de deux quarrez quarrez: ainſi on auroit un quarré qui ſeroit la ſomme de deux quarrez quarrez, contre la deuxiéme Conſéquence.

Prop. 35.

IV.

Un quarré quarré ne peut eſtre la ſomme de deux quarrez, dont l'un ait pour racine un double quarré, parce que les racines de ces trois quarrez ſeroient les trois coſtez d'un Triangle, qui auroit un nombre quarré pour ſon hypoténuſe, & un double quarré pour ſon coſte pair, contre la troiſiéme Conſéquence.

PROPOSITION XLI.

En tout Triangle primitif la ſomme des deux coſtez eſt octonaire + ou — 1, & la difference des meſmes coſtez, eſt auſſi octonaire + ou — 1, ou eſt l'unité meſme.

DEMONSTRATION.

SOIENT A & B les générateurs du Triangle, dont A ſoit le nombre pair; & ſoit premiérement A pairement pair, & plus grand

grand que B; d'autant que le quarré de A est octonaire, & le quarré de B octonaire + 1, ou l'unité; leur difference, qui est le costé impair du Triangle, sera octonaire — 1: or le costé pair sera octonaire, puis qu'il est double de A B quaternaire: donc la somme de ces deux costez en ce premier cas sera octonaire — 1. Que si A est moindre que B, son quarré, qui est octonaire, estant osté du quarré de B, qui est octonaire + 1, le reste, qui est le costé impair, sera octonaire + 1; car cette difference ne peut estre l'unité, & le costé pair estant octonaire, la somme des deux sera octonaire + 1 en ce second cas. *Prop.* 4. *Prop.* 7. *Conf.* 1. *Prop.* 18.

Soit maintenant A impairement pair, & plus grand que B, son quarré sera 4 ou octonaire + 4, duquel estant osté le quarré de B, qui est l'unité, ou un octonaire + 1, le reste, qui est le costé impair, sera 3 ou octonaire + 3: mais A estant 2 ou quaternaire + 2, A B sera 2 ou quaternaire + 2, & 2 A B costé pair sera octonaire + 4: donc en ce troisiéme cas la somme de ces deux costez sera 7 ou octonaire + 7, c'est à dire octonaire — 1. *Prop.* 4. *Prop.* 7.

Que si A est moindre que B, ayant osté 4, ou un octonaire + 4 quarré de A, d'un octonaire + 1 quarré de B, le reste sera 5, ou octonaire + 5 pour le costé impair, lequel estant joint au costé pair, qui est octonaire + 4, la somme sera octonaire + 9, c'est à dire octonaire + 1, en ce quatriéme & dernier cas: donc la somme des deux costez de tout Triangle primitif est octonaire + ou — 1.

Pour la deuxiéme partie, soit au premier cas cy-dessus le costé impair moindre que le costé pair, d'autant qu'il est octonaire — 1, il est évident que si on l'oste du costé pair, qui est octonaire, le reste sera octonaire + 1, ou l'unité, & que si le costé impair est le plus grand, leur difference sera octonaire — 1.

Au deuxiéme cas, si le costé pair est le plus grand, ayant osté un octonaire + 1 d'un octonaire, le reste sera octonaire — 1, & si le costé pair est le moindre, leur difference sera octonaire + 1, ou l'unité.

Au troiſiéme cas, ſi le coſté pair eſt le plus grand, & qu'on oſte 3, ou un octonaire +3, de 4 ou d'un octonaire +4, le reſte ſera octonaire +1, ou l'unité; & ſi le coſté pair eſt le moindre, oſtant un octonaire +4 d'un octonaire +3, le reſte ſera octonaire — 1.

Au quatriéme & dernier cas, ſi le coſté pair eſt le plus grand, qui eſt octonaire +4, & qu'on en oſte l'impair qui eſt 5, ou octonaire +5, le reſte ſera octonaire — 1; & ſi le coſté pair eſt le moindre, leur difference ſera octonaire +1, ou l'unité. Donc en tout Triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SECONDE

SECONDE PARTIE
DES
TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES.

Cette seconde Partie contient seulement deux Problemes.

Le premier, est de trouver une multitude requise de Triangles rectangles en nombres, dont chacun ait pour son aire celle d'un Triangle donné.

Le second, est de trouver une multitude requise de Triangles rectangles en nombres qui ayent une mesme aire.

Il est manifeste que la solution du premier Probleme ne se peut donner universellement en nombres entiers, comme le nombre 6 ne peut estre l'aire que du seul Triangle 3, 4, 5. La raison est que le nombre 12, qui est le produit des deux costez 3 & 4, & qui est le double de cette aire 6, ne peut estre produit par d'autres nombres entiers, que par 1 & 12, & par 2, & 6, & que chacun de ces nombres 1 & 2 ne peut estre le costé d'un Triangle rectangle par la troisiéme Conséquence de la Proposition vingtiéme: il est donc nécessaire que les autres Triangles rectangles, dont l'aire sera égale à 6, ayent leurs costez exprimez par des fractions. Il en est de mesme du nombre 30, qui ne peut estre l'aire en nombres entiers que du seul Triangle 5, 12, 13; mais on peut bien trouver un nombre entier qui soit l'aire de tant de Triangles rectangles qu'on voudra, dont les trois costez soient des nombres entiers.

PREMIÉRE PROPOSITION.

LEMME.

Si le produit de deux nombres est mesuré par un quarré, & que chacun de ces nombres soit divisé par la racine de ce quarré, le produit des deux quotiens sera égal au premier produit divisé par le mesme quarré.

DEMONSTRATION.

Supp. 12. SOIENT les deux nombres AC & BC, leur produit sera ABC^2; il est évident que si on divise chacun de ces nombres par C, on aura A & B, dont le produit AB est égal à ABC^2 divisé par C^2; ou bien si les deux nombres sont A & BC^2, leur produit sera comme devant ABC^2; & si on divise chacun de ces nombres A & BC^2 par C, sçavoir par la racine du quarré qui mésure leur produit, on aura $\frac{A}{C}$ & BC, dont le produit est AB comme devant.

SECONDE PROPOSITION.

PREMIER PROBLEME.

Trouver une multitude requise de Triangles rectangles en nombres, dont chacun ait pour son aire celle d'un Triangle donné.

SOIT un Triangle rectangle quelconque A, B, C, dont les moindres costez soient A & B, son aire sera $\frac{1}{2}$ AB. On demande d'autres Triangles en telle multitude qu'on voudra, dont chacun ait $\frac{1}{2}$ AB pour son aire.

PREPARATION.

Ce problême se reduit à trouver d'autres Triangles rectangles qui ne gardent pas la mesme proportion entre leurs costez, & dont l'aire soit multiple de $\frac{1}{2}$ AB par un quarré.

La

La raison est que si on divise les costez de chacun de ces Triangles par la racine du quarré, par lequel son aire est multiple de l'aire $\frac{1}{2}$ AB, le Triangle qui en proviendra aura $\frac{1}{2}$ AB pour son aire, puis qu'elle est le produit d'un des costez du Triangle par la moitié de l'autre. Prop. 1.

On observera qu'aux Triangles suivans qui servent à la solution du Problême, on met au premier lieu le costé qui est la difference des deux quarrez qui composent l'hypoténuse, ou qui est multiple de l'impair du primitif, quand le Triangle multiple n'a point de nombres générateurs, & on l'appelle toûjours le premier costé en cette deuxiéme Partie; on met en suite le costé pair & l'hypoténuse aprés. Et parce que l'operation ne fait pas voir si le premier costé est moindre que le second, ou s'il est plus grand, c'est à dire, si le costé A *est plus grand que* B, *ou s'il est moindre, on se sert de la marque* $\overline{=}$ *qui signifie difference. Ainsi les moindres costez du Triangle donné estant* AB, *le costé impair du premier Triangle trouvé sera* $A^2 \overline{=} B^2$, *sçavoir la difference entre* A^2 & B^2 : *de maniere que si* B *est plus grand que* A, *ce costé impair sera* $B^2 - A^2$; *mais si* A *est plus grand que* B, *ce costé sera* $A^2 - B^2$.

Et pour éviter la confusion des caractéres, lors que le premier costé se doit exprimer par le signe $\overline{=}$ *ou l'hypoténuse par le signe* $+$, *on se sert d'un caractére nouveau pour les exprimer, & on met au dessous la Valeur de ce caractére en petites lettres, comme on verra dans la suite.*

SOLUTION DU PROBLEME.

PREMIERE CONSTRUCTION.

QUE A, B, C soient les costez d'un Triangle rectangle quelconque, je prens les deux costez A & B pour les nombres générateurs d'un autre Triangle, qui sera $A^2 \overline{=} B^2$, 2 AB, $A^2 + B^2$: & afin de ne point augmenter la multitude des caractéres, je mets D au lieu de $A^2 \overline{=} B^2$; & parce que la somme des quarrez des deux costez d'un Triangle rectangle est le quarré de l'hy-

Premier Triangle trouvé.

l'hypoténuse, on prendra C^2 pour l'hypoténuse de ce Triangle qu'on mettra au lieu de $A^2 + B^2$, & le Triangle sera D, 2 AB, C^2, & c'est le premier Triangle trouvé, & au dessous de D on mettra $a^2 - b^2$, qui est la valeur de D.

SECONDE CONSTRUCTION.

Que l'hypoténuse C^2 & le costé pair de ce premier Triangle trouvé, sçavoir 2 AB, soient pris pour les nombres générateurs d'un second Triangle, ils formeront le Triangle $C^4 - 4A^2B^2$, $4ABC^2$, $4A^2B^2 + C^4$.

Que l'hypoténuse $4A^2B^2 + C^4$ soit nommée E, à cause quelle a le signe +, suivant ce qui a esté remarqué cy-devant,

Et parce qu'en tout Triangle rectangle la difference des quarrez de l'hypoténuse, & d'un des costez est le quarré de l'autre costé, il s'ensuit que cet autre costé estant $C^4 - 4A^2B^2$, il sera égal à D^2, qui est le quarré du prémier costé du prémier Triangle trouvé. Le deuxiéme Triangle sera donc,

Deuxiéme Triangle trouvé.

D^2, $4ABC^2$, E
$4a^2b^2 + c^4$

Les caracteres $4a^2b^2 + c^4$ *qui sont au dessous de* E, *marquent sa valeur.*

L'aire de ce second Triangle est $2ABC^2D^2$, qui estant divisée par $\frac{1}{2}AB$ aire du Triangle donné, on aura pour quotient $4C^2D^2$ qui est un quarré; sa racine est $2CD$, par laquelle le second Triangle D^2, $4ABC^2$, E estant divisé, on aura le Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}AB$, sçavoir la moitié du produit de $\frac{D}{2C}$ par $\frac{2ABC}{D}$, qui est la mesme que celle du Triangle donné.

Or avec ce second Triangle on en fera un troisiéme par la premiere Construction, prenant pour ses générateurs les deux costez de ce second, qui sont D^2 & $4ABC^2$; & si on prend le costé pair & l'hypoténuse de ce troisiéme Triangle pour les générateurs d'un

d'un autre Triangle, ſuivant la ſeconde Conſtruction, on aura un quatriéme Triangle, & ainſi de ſuite.

Pour éclaircir cela d'avantage.

Que les trois coſtez du ſecond Triangle ſoient nommez F, G, E: ſi on prend les deux coſtez F, G, pour les générateurs d'un troiſiéme Triangle, ſuivant la premiére Conſtruction, ce troiſiéme Triangle ſera $F^2 = G^2$, 2 F G, E^2, dont l'hypoténuſe doit eſtre un nombre quarré, parce que le Triangle F, G, E, tient icy lieu d'un Triangle donné, & ce troiſiéme tiendra lieu d'un premier Triangle trouvé. De maniére que ſi on prend l'hypoténuſe E^2, & le coſté pair 2 F G de ce premier Triangle trouvé pour les générateurs d'un autre Triangle, il en viendra un quatriéme, dont le premier coſté ſera un nombre quarré, comme au deuxiéme Triangle; & l'aire de ce quatriéme ſera multiple par un quarré de 2 A B C^2 D^2, qui eſt l'aire du ſecond Triangle, comme cette aire eſt multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, aire du Triangle donné. Et par conſéquent l'aire de ce quatriéme Triangle ſera auſſi multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, & ainſi conſécutivement on fera tant de Triangles qu'on voudra, dont l'aire ſera multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B; & les coſtez de ces Triangles eſtant diviſez par la racine de ce quarré, on aura des Triangles qui auront $\frac{1}{2}$ A B pour leur aire. *Prop.* I.

Voicy huit Triangles, qui viennent du Triangle donné A, B, C, entre leſquels il y en a quatre, dont l'aire eſt multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ A B, ſçavoir de l'aire du Triangle donné; & ces Triangles ſont le deuxiéme, le quatriéme, le ſixiéme, & le huitiéme, qui ont leur rang marqué par un nombre pair.

PREMIERE TABLE.

	Premier costé	Costé pair	Hypot.	
Triangle donné,	A,	B,	C,	aire $\frac{1}{2}AB$.
1er Triangle trouvé	D, $a^2 - b^2$.	$2AB$,	C^2.	
2e Triangle	D^2,	$4ABC^2$,	E $4a^2b^2 + c^4$	aire $2ABC^2D^2$.
3e Triangle	F, $d^4 - 16a^2b^2c^4$.	$8ABC^2D^2$,	E^2.	
4e Triangle	F^2,	$16ABC^2D^2E^2$,	G $64a^2b^2c^4d^4 + e^4$.	aire $8ABC^2D^2E^2F^2$.
5e Triangle	H, $f^4 - 256a^2b^2c^4d^4e^4$.	$32ABC^2D^2E^2F^2$,	G^2.	
6e Triangle	H^2,	$64ABC^2D^2E^2F^2G^2$,	I $1024a^2b^2c^4d^4e^4f^4 + g^4$.	aire $32ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$.
7e Triangle	K, $h^4 - 4096a^2b^2c^4d^4e^4f^4g^4$.	$128ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$,	I^2.	
8e Triangle	K^2,	$256ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$,	L $16384a^2b^2c^4d^4e^4f^4g^4h^4 + i^4$.	aire $128ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$.

On

On observera en ces huit Trianglesque l'hypoténuse & le premier costé sont alternativement marquez d'un seul caractére non quarré; & alors on met au dessous de ce caractere sa valeur, exprimée en petites lettres, qui sont les mesmes que celles du costé pair du mesme Triangle, & qui viennent du Triangle précédent.

De mesme l'hypoténuse & le premier costé sont alternativement exprimez par un caractére quarré, où on remarquera que lors que le premier costé est un nombre quarré, l'hypoténuse ne l'est pas; & alors ce Triangle a son aire multiple par un quarré de $\frac{1}{2}$ AB, *& on écrit cette aire aprés le Triangle. On pourroit obmettre les Triangles dont l'ordre est marqué par un nombre impair; sçavoir, le premier, le troisiéme, le cinquiéme, & le septiéme, dont l'aire n'est pas multiple par un quarré de l'aire* $\frac{1}{2}$ A B: *mais pour la facilité de la démonstration on les a compris dans cette Table.*

On voit assez par l'inspection de la Table qu'on la peut aisément continuër tant qu'on voudra, puis que le costé pair n'augmente à chaque Triangle que d'un caractere, à commencer au second Triangle trouvé, & mettant au devant des caractéres le double du nombre qui est devant le costé pair du Triangle précédent.

Pour ce qui est de l'aire, elle augmente de deux caractéres, qui ont la marque de quarré, à cause qu'on ne la met que de deux en deux Triangles; sçavoir a ceux dont l'ordre est marqué par un nombre pair. Ces deux caractéres sont ceux qui marquent le premier costé du mesme Triangle, & l'hypoténuse du Triangle précédent: chacun de ces caractéres a la marque de quarré; & on met au devant de tous les caractéres le quadruple du nombre qui est devant les caractéres, de l'aire précedente.

Pour l'hypoténuse & le premier costé, on les marque aisément, mettant en leur lieu un caractére nouveau, en la façon qu'on le peut remarquer dans la Table précédente.

DEMONSTRATION.

Il est évident par la premiére Construction, que l'hypoténuse

 du

du premier Triangle trouvé eſt toûjours le quarré de l'hypoténuſe du Triangle précédent, qui eſt le Triangle donné; que le coſté pair de ce premier Triangle trouvé eſt quadruple de l'aire du Triangle donné, puis qu'il eſt double du produit de ces coſtez, & que l'aire n'eſt que la moitié de ce produit.

Première Conſtruction.

Et parce que le ſecond Triangle eſt formé par l'hypoténuſe du premier Triangle trouvé, qui eſt toûjours un nombre quarré, & par le coſté pair du meſme premier Triangle, qui eſt multiple, par un quarré, ſçavoir par quatre de l'aire du Triangle donné; le coſté pair de ce ſecond Triangle ſera multiple par un double quarré de l'aire du Triangle donné.

Deuxiéme Conſtruction.

Or le premier coſté de ce ſecond Triangle eſt toûjours un nombre quarré. Donc l'aire de ce ſecond Triangle, qui eſt la moitié du produit des deux coſtez de ce Triangle, eſt multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné.

Or tout ce qui arrive au premier & au ſecond Triangle, en ſuite & par le moyen du Triangle donné, arrive auſſi au troiſiéme & au quatriéme en ſuite du ſecond; parce que ce ſecond Triangle pouvant eſtre pris pour le Triangle donné, le troiſiéme ſe forme de ce ſecond, & le quatriéme du troiſiéme, en la meſme façon que le premier Triangle trouvé ſe forme du Triangle donné, & le ſecond du meſme premier.

On doit faire le meſme jugement du cinquiéme & du ſixiéme Triangle, qui ſe font par le moyen du quatriéme; & du ſeptiéme & huitiéme, qui viennent du ſixiéme, & ainſi des autres ſuivans à l'infini.

De là s'enſuit que comme on a fait voir que l'aire du ſecond Triangle eſt multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné; auſſi l'aire du quatriemé ſera multiple par un quarré de l'aire du ſecond, & l'aire du ſixiéme de celle du quatriéme, & ainſi de ſuite.

Donc l'aire de tous ces Triangles, dont l'ordre eſt coſté par un

un nombre pair, ſçavoir le deuxiéme, le quatriéme, le ſixieme, & les autres en ſuite, ont leur aire multiple par un quarré de l'aire du Triangle donné. Ce qui eſtoit à démontrer.

Il eſt aiſé de faire voir auſſi que les Triangles qui viennent du Triangle donné par la méthode précédente, ne gardent pas une meſme proportion ou raiſon entre leurs coſtez ; c'eſt à dire, que leurs coſtez ne ſont pas multiples des coſtez du Triangle donné, ny de ceux qui viennent en ſuite. Car ſi on ſuppoſe que le Triangle donné ſoit primitif, le premier Triangle qu'il faut trouver, ayant pour ſes générateurs les coſtez du Triangle donné, qui ſont premiers entre eux, la difference de leurs quarrez n'aura point de commune méſure avec aucun d'eux, ny avec le double de leur produit. Or cette différence eſt le premier coſté de ce premier Triangle, & le double du produit des coſtez en eſt le coſté pair. Donc les coſtez de ce premier Triangle ſeront auſſi premiers entre eux, & par conſequent avec l'hypoténuſe. *Prop.* 13. 1. *partie.*

De meſme, parce que l'hypoténuſe & le coſté pair du premier Triangle trouvé ſont les générateurs du ſecond Triangle, puis que ces nombres ſont premiers entre eux, & l'un pair & l'autre impair ; la ſomme de leurs quarrez, qui eſt l'hypoténuſe de ce ſecond Triangle, n'aura point de commune méſure avec aucun de ces nombres générateurs, ny avec leur produit, ny le double de ce produit, cette ſomme eſtant un nombre impair. Donc l'hypoténuſe de ce ſecond Triangle n'aura point de commune méſure avec le coſté pair, qui eſt ce double produit, ny par conſéquent avec le premier coſté. *Porp.* 13. 1. *partie.*

Donc ce ſecond Triangle ſera encore primitif ; & ainſi ſes coſtez ne garderont pas entre eux la meſme proportion que ceux du Triangle donné, ny les autres Triangles qui ſeront formez de ce ſecond, qui peut tenir lieu du Triangle donné.

Or ſi les coſtez de ces Triangles formez par celuy qui a eſté donné, ne gardent pas entre eux la meſme proportion que les coſtez du donné, leurs multiples ne la garderont pas auſſi, parce que les Triangles multiples gardent toujours la meſme proportion en-

tre leurs costez que leurs primitifs. Et ainsi cela se trouvéra véritable, tant aux primitifs qu'aux multiples, quoy que les costez des multiples ayent une commune mésure.

Il a esté necessaire de mettre cette condition aux Triangles, pour faire qu'un mesme nombre soit l'aire de plusieurs Triangles; parce que comme tout Triangle multiple a son aire multiple par un quarré de celle de son primitif, & que la racine de ce quarré est le nombre par lequel le Triangle primitif a esté multiplié; si les Triangles estoient multiples d'un mesme Triangle, lors qu'on viendroit à diviser le Triangle multiple par cette racine, le Triangle qui en viendroit seroit le primitif donné, & ainsi on n'auroit que ce mesme Triangle, & on ne satisferoit pas à la proposition. Ainsi le Triangle donné estant 3, 4, 5, ce ne seroit pas assez de prendre les Triangles 6, 8, 10, ou 9, 12, 15, pour faire des Triangles qui eussent une mesme aire, quoy que l'aire de chacun de ces deux Triangles soit multiple par un quarré de celle de 3, 4, 5, parce que leurs costez gardent entre eux la mesme proportion que les costez du Triangle donné 3, 4, 5.

Prop. 31. 1. partie.

Mais pour revenir au probléme principal, puis que chacune des aires trouvées par la méthode précédente est multiple par un quarré de celle du Triangle donné, si on divise chacune d'elles par l'aire du Triangle donné, on aura un quarré, par la racine duquel divisant le Triangle dont on considére l'aire, on aura un Triangle qui aura une mesme aire que le Triangle donné A, B, C; & c'est ce qui estoit requis. En voicy l'opération.

Prop. 1.

L'aire du second Triangle trouvé, qui est en la premiére Table, est $2\,ABC^2D^2$; qu'elle soit divisée par $\frac{1}{2}AB$, aire du Triangle donné; le quotient sera $4\,C^2D^2$, qui est un quarré; sa racine est $2\,CD$, par laquelle on divisera le second Triangle D^2, $4ABC^2$, E, & on aura le Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}AB$, comme au Triangle donné.

L'aire du quatriéme Triangle est $8\,ABC^2D^2E^2F^2$, qui estant divisée par $\frac{1}{2}AB$, donne $16\,C^2D^2E^2F^2$, quarré de

4 CDEF, qui divisant le quatriéme Triangle, il en viendra le Triangle $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, dont l'aire est aussi $\frac{1}{2}$ AB.

L'aire du sixiéme Triangle estant divisée par $\frac{1}{2}$ AB donne $64C^2D^2E^2F^2G^2H^2$, quarré de 8 CDEFGH, qui divisant le sixiéme Triangle, donne le Triangle $\frac{H}{8CDEFG}$ $\frac{8ABCDEFG}{H}$, $\frac{I}{8CDEFGH}$, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ AB, comme au Triangle donné.

Enfin l'aire du huitiéme Triangle estant divisée par $\frac{1}{2}$ AB, donne $256C^2D_2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, dont la racine est 16CDEFGHIK, qui divisant le huitiéme Triangle, donne le Triangle $\frac{K}{16CDEFGHI}$, $\frac{16ABCDEFGHI}{K}$, $\frac{L}{16CDEFGHIK}$, dont l'aire est aussi $\frac{1}{2}$ AB.

On a donc cinq Tringles, compris le Triangle donné, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ AB, qui est celle qui avoit esté proposée. Voicy les cinq Triangles en la Table suivante.

SECONDE TABLE

Qui ne contient que les Triangles dont l'aire est égale à celle du Triangle donné, qui y est aussi compris.

1er Triangle,	A,	B,	C.
2e	$\frac{D}{2C}$,	$\frac{2ABC}{D}$,	$\frac{E}{2CD}$.
3e	$\frac{F}{4CDE}$,	$\frac{4ABCDE}{F}$,	$\frac{G}{4CDEF}$.

4e	$\frac{H}{8CDEFG}$,	$\frac{8ABCDEFG}{H}$,	$\frac{I}{8CDEFGH}$.
5e	$\frac{K}{16CDEFGHI}$,	$\frac{16ABCDEFGHI}{K}$,	$\frac{L}{16CDEFGHIK}$.

Aire commune ½ AB.

Et pour réduire ces caractéres en nombres, si on prend le Triangle 3, 4, 5, pour A, B, C, le second Triangle de cette seconde Table sera $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$, & les deux moindres costez du troisiéme Triangle de la mesme seconde Table seront $\frac{1437599}{168140}$, & $\frac{2017680}{1437599}$.

Cela sera facile à calculer, si on prend la valeur de chaque caractére, & par ce moyen on trouvéra que le second Triangle de la premiére Table, sçavoir D^2, $4ABC^2$, E, est 49, 1200, 1201, dont l'aire 29400 estant divisée par 6, sçavoir par l'aire du Triangle donné 3, 4, 5, on aura 4900, quarré de 70, qui est le nombre par lequel doit estre divisé le Triangle 49, 1200, 1201, & de quotient sera le Triangle $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$, qui est la valeur du Triangle $\frac{D}{2C}$, $\frac{2ABC}{D}$, $\frac{E}{2CD}$, & l'aire de ce Triangle est 6.

De mesme on aura la valeur du troisiéme Triangle de la seconde Table, sçavoir de $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, correspondant au quatriéme de la premiére Table qui est F^2, $16ABC^2D^2E^2$, [illegible], dont les costez vaillent 2066690884801, 33925271 5200, 20943504 04801, son aire est $8ABC^2D^2E^2F^2$, qui vaut 35056524707391483 08 37600, qui estant divisée

par

par 6, qui est l'aire du Triangle donné, on aura 584275411789858051139600, quarré de 241717895860, qui est le diviseur; & ce nombre estant pris suivant ce qui se pratique ordinairement en Algébre, pour le dénominateur commun des trois costez du Triangle 206669088 &c. qui est le quatriéme de la premiére Table, on aura $\frac{2066690884801,\ 339252715200,\ 2094350404801,}{241717895860,}$ qui est la valeur du troisiéme Triangle de la seconde Table marqué par les caractéres $\frac{F}{4CDE}$, $\frac{4ABCDE}{F}$, $\frac{G}{4CDEF}$, & divisant ce Triangle, sçavoir le quatriéme de la premiére Table par 241717895860, on trouvéra la valeur en fractions, qui réduites aux moindres termes, donnent le Triangle $\frac{1437599}{168140}$, $\frac{2017680}{1437599}$, $\frac{2094350404801}{241717895860}$.

On pourroit trouver quelque difficulté à réduire ces fractions, parce que le nombre par lequel le Triangle doit estre divisé, ne mésure aucun des costez du Triangle, encore que ce diviseur ait une commune mésure avec chacun des deux moindres costez du mesme Triangle, quoy que ce ne soit pas la mesme en chacun d'eux: car la mésure commune de ce diviseur avec le premier costé est 1437599; mais la mésure avec le costé pair est 168140, & ces deux nombres 1437599 & 168140 sont premiers entre eux.

On trouvéra aisément ces communes mésures, en considérant que le premier costé du Triangle, sçavoir 2066690884801 est F^2, dont la racine est 1437599. Donc pour mettre aux moindres termes la fraction $\frac{2066690884801}{241717895860}$, qui est le premier costé du quatriéme Triangle de la premiére Table, divisé par 241717895860, qui est le diviseur commun de ce Triangle, on divisera le numérateur & le dénominateur de cette fraction par 1437599, racine de son numérateur, & on aura $\frac{1437599}{168140}$ pour le premier costé réduit aux moindres termes; & divisant le

costé pair $\frac{339252715200}{241517895860}$ du mesme quatriéme Triangle de la premiére Table, divisé par le diviseur commun 241717895860, par 168140, qui est le dénominateur de la fraction $\frac{1437599}{168140}$, qui exprime le premier costé, on aura $\frac{2017680}{1437599}$ pour le costé pair du mesme Triangle réduit à ses moindres termes.

Pour ce qui est de l'hypoténuse, elle n'a point de commune mésure avec le nombre par lequel on doit diviser le Triangle.

Or pour plus grande facilité, on reprend icy la premiére Table, & on y exprime la valeur de chaque costé des Triangles, par les nombres qui sont au dessus, & mesme la valeur de chaque petit caractére par un nombre qu'on met au dessous, comme on le voit en la Table suivante.

TROISIÉME TABLE.

Triangle donné	3 A,	4 B,	5 C.	
1. Triangle trouvé	7, D, $a^2 - b^2$ 9, 16.	24, 2AB, 3, 4.	25, C^2,	
2.	49, D^2,	1200, $4ABC^2$, 3, 4, 25,	1201, E, $4a^2b^2 + c^4$, 9, 16, 625.	29400, aire $2ABC^2D^2$, 3, 4, 25, 49.

1437599,

1437599, 117600, 1442401,
3e F $8ABC^2D^2$, E^2,
d^4 —— $16a^2b^2c^4$, 3,4,25,49,
2401, 9,16,625,
1440000.

2066690884801, 339252715200, 2094350404801,
4e F^2, $16ABC^2D^2E^2$, G,
3,4,25,49,1442401, $64a^2b^2c^4d^4 + e^4$,
9,16,625,240,12080520644801,
13829760000.

aire 350565247073914830837600,
$8ABC^2D^2E^2F^2$
3, 4, 25, 49, 1442401, 2066690884801.

On a obmis les autres Triangles, parce que ceux-cy suffisent pour faire voir la forme du calcul.

Le nombre 1440000, qu'on a mis au dessous de $16a^2b^2c^4$, est le produit de ces quatre nombres, c'est à dire, de 16, 9, 16, 625; duquel produit si on oste d^4, ou 2401, il reste 1437599 pour la valeur du caractére F. On a fait de mesme à l'égard du dernier costé G, car le nombre 13829760000 est le produit des cinq nombres 64, 9, 16, 625, 2401, lequel ajoûté à e^4, ou 2080520644801, fait la valeur de G, sçavoir 2094350404801.

La maniére de ce calcul sera facile à ceux qui feront reflexion sur les deux Constructions de ce Triangle : car puis qu'on prend les deux moindres costez du Triangle donné pour les générateurs du premier Triangle qu'il faut trouver, le premier costé de ce premier Triangle sera 7 (supposant que le Triangle donné soit 3, 4, 5,)

 sça-

sçavoir la différence de 9 & de 16, quarrez des costez 3 & 4, & l'hypoténuse du mesme Triangle sera 25, puis que c'est le quarré de l'hypoténuse du Triangle donné. De mesme au second Triangle 49, 1200, 1201, on voit par la seconde Construction qu'il faut prendre l'hypoténuse & le costé pair du premier Triangle trouvé pour les générateurs du second, & ainsi que le premier costé de ce second Triangle est toûjours le quarré du premier costé du premier Triangle; & parce que D, qui est ce costé, est 7, D^2 sera 49.

Pour ce qui est de l'hypoténuse E, comme elle est la somme des quarrez de C (25) & de 2AB (24) lesquels quarrez sont 625 & 576, ce sera 1201.

De mesme, on trouvéra que le costé pair du mesme Triangle, sçavoir $4ABC^2$ est 1200, puis qu'il est le double du produit de 24 par 25, costez du premiér Triangle.

On trouvéra en la mesme sorte les costez du troisiéme Triangle F, $8ABC^2D^2$, E^2: car les nombres générateurs de ce Triangle estant D^2 (49) & $4ABC^2$ (1200) sçavoir les deux moindres costez du second Triangle, la différence des quarrez de ces deux nombres 49 & 1200, qui sont 2401, & 1440000, est le premier costé F, dont la valeur est 1437599, & l'hypoténuse E^2 estant la somme des mesmes quarrez, sera 1442401, qui est aussi le quarré de E (1201) hypoténuse du Triangle précédent, sçavoir du deuxiéme.

1. *Construction.*

Le costé pair $8ABC^2D^2$, estant le double du produit de D^2 (49) par $4ABC^2$ (1200) sera 117600.

Enfin, pour avoir le quatriéme Triangle, on prendra pour générateurs les nombres 117600, & 1442401, sçavoir le costé pair, & l'hypoténuse du troisiéme Triangle; les quarrez de ces nombres sont 13829760000, & 2080520644801, dont la somme est l'hypoténuse G (2094350404801); & la difference des mesmes quarrez est le premier costé 2066908884801, qui est aussi le quarré de 1437599, premier costé du Triangle précédent, sçavoir F^2, & le costé pair est 339252715200, sçavoir

2. *Construction.*

voir le double du produit des deux nombres générateurs 117600, & 1442401.

Les aires se trouvent par la voye ordinaire.

TROISIEME PROPOSITION.

PROBLEME II.

Trouver une multitude requise de Triangles rectangles en nombres entiers qui ayent une mesme aire.

On demande, par exemple, cinq Triangles en nombres entiers, chacun desquel ait un mesme nombre pour son aire.

CONSTRUCTION.

Soit pris un Triangle rectangle quelconque A, B, C; & soient faits des Triangles en la multitude requise, dont l'aire soit multiple par un quarré de l'aire de ce Triangle, par la maniére dont on s'est servi pour faire ceux de la premiére Table cydevant. Or on n'a besoin d'en faire qu'un moins de ce qui est requis, à cause de celuy dont on se sert pour faire les autres: ainsi, pour avoir cinq Triangles qui ayent une mesme aire, il suffira d'en faire quatre, parce que le Triangle donné fait le cinquiéme.

SOLUTION.

Soient faits par la méthode précédente quatre Triangles, dont l'aire soit multiple par un quarré de celle du Triangle qu'on aura choisi pour faire les autres, comme ceux de la premiére Table; on en fera comme s'ensuit cinq, dont chacun aura pour son aire celle du plus grand Triangle. On divisera la plus grande aire de tous ces Triangles, qui est celle du dernier, par l'aire de chacun des quatre autres, y compris le Triangle qui a servi à faire tous les autres; & on aura quatre quotiens, chacun desquels sera un nombre quarré, par la conclusion de la démonstration de la Proposi-

 tion

tion précédente : on prendra la racine de chacun de ces quarrez, & chacune de ces racines est le nombre par lequel on doit multiplier le Triangle, dont est venu le quarré de cette racine par la division qu'on a faite.

La Table suivante contient les cinq Triangles, dont l'aire est multiple de $\frac{1}{2}$ AB (6) par un quarré, y compris le premier, A, B, C, dont l'aire est $\frac{1}{2}$ AB.

QUATRIÉME TABLE.

1er Tr.	A, B, C,		aire $\frac{1}{2}AB$.
2e	D^2, $4ABC^2$,	E,	aire $2ABC^2D^2$.
3e	F^2, $16ABC^2D^2E^2$,	G,	aire $8ABC^2D^2E^2F^2$.
4e	H^2, $64ABC^2D^2E^2F^2G^2$,	I,	aire $32ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$.
5e	K^2, $256ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$,	L,	aire $128ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$.

Et ces Triangles sont le deuxiéme, le quatriéme, le sixiéme, & le huitiéme de la premiére Table, avec le Triangle donné; & de ces quatre Triangles on en fera comme s'ensuit quatre autres, dont chacun aura pour son aire celle du dernier & plus grand de ces Triangles.

Pour faire qu'un multiple du Triangle A, B, C, ait la mesme aire que le cinquiéme & dernier de la Table précédente, sçavoir de la quatriéme, laquelle aire est $128ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, on divisera cette aire par $\frac{1}{2}$ AB, qui est l'aire du Triangle donné A, B, C; le quotient est $256C^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, qui est un quarré; sa racine est 16 CDEFGHIK, par laquelle multipliant le Triangle A, B, C, on aura le Triangle 16 ACDEFGHIK, 16BCDEFGHIK, $16C^2DEFGHIK$, dont l'aire est $128ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$ égale à celle du cinquiéme & dernier Triangle de la quatriéme Table.

1. Triangle.

Cette mesme aire du cinquiéme Triangle de la quatriéme Table estant divisée par $2ABC^2D^2$, qui est l'aire du deuxiéme Triangle de la quatriéme Table, donne $64E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, dont la racine est 8EFGHIK, par laquelle multipliant le deuxiéme Tri-

Triangle D^2, $4ABC^2$, E, on aura le Triangle $8D^2EFGHIK$, $32ABC^2EFGHIK$, $8E^2FGHIK$, qui est le deuxiéme Triangle, dont l'aire est la mesme que celle du cinquiéme & dernier Triangle. 2. Triangle.

Cette mesme aire du cinquiéme Triangle estant divisée par $8ABC^2D^2E^2F^2$, qui est l'aire du troisiéme Triangle de la quatriéme Table donne $16G^2H^2I^2K^2$, dont la racine est $4GHIK$, par laquelle multipliant ce troisiéme Triangle F^2, $16ABC^2D^2E^2$, G, on aura le troisiéme Triangle, qui a la mesme aire que le cinquiéme, ce Triangle est $4F^2GHIK$, $64ABC^2D^2E^2GHIK$, $4G^2HIK$. 3. Triangle.

Enfin la mesme aire du cinquiéme Triangle estant divisée par $32ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2$, qui est l'aire du quatriéme Triangle de la quatriéme Table, sçavoir du Triangle H^2, $64ABC^2D^2E^2F^2G^2$, I, on aura $4I^2K^2$, dont la racine est $2IK$, par laquelle multipliant ce quatriéme Triangle, on aura le quatriéme Triangle requis, $2H^2IK$, $128ABC^2D^2E^2F^2G^2IK$, $2I^2K$, dont l'aire est la mesme qu'aux précédens. 4. Triangle.

Cette aire est $128ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2K^2$, qui est la mesme que celle du cinquiéme & dernier Triangle de la quatriéme Table. Ce dernier Triangle est K^2, $256ABC^2D^2E^2F^2G^2H^2I^2$, L, qui est le cinquiéme de ceux qui ont une mesme aire. 5. Triangle.

Voicy quelques Triangles en nombres entiers, qui ont une mesme aire. On n'a calculé que les trois premiers, pour éviter le calcul de si grands nombres, qui n'apporteroit aucune utilité, & l'aire commune de ces Triangles est celle du troisiéme de la quatriéme Table, & non pas celle du cinquiéme Triangle de la mesme quatriéme Table.

Ier Triangle	725153687580,	966871583440,	1208589479300.
2e	169202527102,	4143735357600,	4147188470398.
3e	2066690884801,	339252715200,	2094350404801.

Aire commune 350565247073914830837600.

Pour

Pour faire qu'un Triangle multiple de 3, 4, 5, ait la mesme aire, que celle du troisiéme, sçavoir 350565 &c. je divise cette aire par 6, qui est celle de 3, 4, 5; le quotient est 58427541178985805139600, quarré de 241717895860, par lequel nombre on multiplie le Triangle 3, 4, 5, pour avoir le premier Triangle 72515 &c. qui a la mesme aire que le troisiéme Triangle, sçavoir 35056 &c.

Cette mesme aire du troisiéme Triangle estant divisée par 29400, aire du deuxiéme Triangle D^2, $4ABC^2$, E, dont la valeur est 49, 1200, 1201, donne 1192398799571138804, qui est un quarré, dont la racine est 3453112798, par laquelle multipliant le deuxiéme Triangle 49, 1200, 1201, on aura le deuxiéme Triangle cy-dessus 169202 &c. qui a la mesme aire que le troisiéme 2066690 &c. dont le calcul est cy-devant à la fin de la deuxiéme Proposition de cette seconde Partie.

REMARQUE.

CETTE méthode est bien facile: toutefois elle a une incommodité, qui est qu'on passe incontinent à de fort grands nombres, comme on le voit en l'exemple précédent, auquel, quoy qu'on ait choisi le moindre de tous les Triangles, sçavoir 3, 4, 5, pour fondement du calcul; néanmoins dés qu'on vient à trois Triangles qui ont une mesme aire, ils ont deja leurs costez de douze ou treize chiffres, & l'aire en a jusques à vingt-quatre; & si on avoit besoin d'une plus grande multitude de Triangles, qu'on voulust exprimer par des nombres, & non point par des caractéres qui signifiassent ces nombres, leur grandeur en rendroit le calcul si laborieux, & si ennuïeux, que cela feroit perdre l'envie de s'y appliquer.

Or pour éviter ce travail, on peut se servir d'une autre méthode, qui donne la mesme quantité de Triangles qui ont une mesme aire, mais qui sont beaucoup moindres que ceux qu'on trouveroit

véroit par la méthode cy-dessus. Il est vray qu'il faut se servir de quelque adresse pour les trouver, parce que comme leur récherche ne dépend pas d'une suite nécessaire, qui soit connuë, il les faut découvrir par induction, en examinant quelquefois par le calcul si quelques-uns des nombres qu'on trouve sont les aires d'un ou de plusieurs Triangles. Voicy quelques régles de cette méthode, & quelques éxemples de Triangles ayant une mesme aire, qui ont esté trouvez par son moyen.

I. REGLE.

Si l'aire d'un Triangle primitif est mesurée par un quarré, & qu'estant divisée par ce quarré, le quotient soit l'aire d'un Triangle primitif, on pourra par ce quotient faire deux Triangles rectangles qui auront une mesme aire: ainsi 1320, aire du Triangle 48, 55, 73, estant divisé par 4, donne 330, aire du Triangle 11, 60, 61, & ce nombre 330, estant multiplié par 2, racine de 4, donne le Triangle 22, 120, 122, dont l'aire est aussi 1320.

II. REGLE.

Si on multiplie par un quarré l'aire d'un Triangle, & que le produit soit l'aire d'un Triangle primitif, on en fera deux Triangles qui auront une mesme aire; comme si 546, aire du Triangle 13, 84, 85, est multiplié par 9, on aura 4914, qui est l'aire du Triangle primitif 27, 364, 365; & multipliant le premier Triangle 13, 84, 85, par 3 racine de 9, on aura le Triangle 39, 252, 255, dont l'aire est aussi 4914.

TABLE DE PLUSIEURS
couples de Triangles, qui ont une mesme aire.

210 est l'aire des deux Triangles primitifs 20, 21, 29, & 12, 35, 37.
2730 est l'aire des deux primitifs 28, 195, 197, & 60, 91, 109.

 7980,

7980, des deux primitifs 40, 399, 401, & 95, 168, 193.
71610, des deux 132, 1085, 1093, & 341, 420, 541.
85470, des deux 140, 1221, 1229, & 259, 660, 709.
106260, des deux 280, 759, 809, & 385, 552, 673.
114114, des deux 77, 2964, 2965, & 364, 627, 725.
2042040, des deux primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201.

Par des opérations à peu prés semblables, on trouvéra trois Triangles qui auront une mesme aire en nombres entiers, par le moyen de deux qu'on aura déja trouvez: car en multipliant par un quarré une aire qui est commune à deux Triangles primitifs, s'il se rencontre que le produit soit l'aire d'un Triangle primitf, on en fera trois Triangles qui auront une mesme aire, ou bien si on multiplie l'aire d'un primitif, & que le produit soit l'aire de deux Triangles.

EXEMPLE.

210, aire des deux Triangles 20, 21, 29; 12, 35, 37, multiplié par quatre, donne 840, aire du primitif 15, 112, 113: & multipliant ces deux mesmes Triangles par 2, racine de 4, on aura 40, 42, 58, & 24, 70, 74, dont l'aire est aussi 840.

Que si l'aire d'un Triangle primitif est divisée par un quarré, & que le quotient soit l'aire d'un Triangle primitif, & que cette aire estant multipliée par un quarré, le produit soit aussi l'aire d'un Triangle primitif, on en fera trois Triangles qui auront une mesme aire; & s'il se rencontre que l'une de ces aires serve à deux Triangles primitifs, la plus grande servira à quatre Triangles.

TABLE DE PLUSIEURS

ternaires de Triangles qui ont une mesme aire.

56,	390,	394,		80,	798,	802,		
105,	208,	233,	aire 10920.	105,	608,	617,	aire 31920.	
120,	182,	218,		190,	336,	386,		

385,

385,	1488,	1537,		855,	2640,	2775,	
264,	2170,	2186,	aire 286440.	792,	2850,	2958,	aire 1128600.
682,	840,	1082,		1485,	1520,	2125,	

455,	4128,	4153,		462,	2520,	2562,	
624,	3010,	3074,	aire 939120.	490,	2376,	2426,	aire 582120.
1118,	1680,	2018,		1008,	1155,	1533,	

1380,	19019,	19069,		528,	7735,	7753,	
3059,	8580,	9109,	aire 13123110.	1001,	4080,	4201,	aire 2042040.
4485,	5852,	7373,		1430,	2856,	3194,	

Ces trois, dont l'aire est 13123110, sont les moindres entre les primitifs qui ayent une mesme aire.

Pour trouver plus de trois Triangles qui ayent une mesme aire comme 4, 5, 6, &c. on peut se servir de quelques régles concernant les parties aliquotes, les combinaisons, &c. par le moyen desquelles on pourra connoistre si un nombre est l'aire de quelque Triangle rectangle: mais comme les opérations en sont longues & difficiles, on s'est restraint à ne donner icy que quelques-uns de ces Triangles, qu'on a trouvez en se servant de ces regles.

TABLE DE TROIS QUATERNAIRES de Triangles qui ont une mesme aire.

111,	6160,	6161,	
231,	2960,	2969,	aire 341880.
280,	2442,	2458,	
518,	1320,	1418,	

Ces quatre Triangles sont les moindres de tous ceux qui ont une mesme aire en nombres entiers.

3289,	31920,	32089,	
2760,	38038,	38138,	aire 52492440.
6118,	17160,	18218,	
8970,	11704,	14746,	

935,	17472,	17497,	
1056,	15470,	15506,	aire 8168160.
2002,	8160,	8402,	
2860,	5712,	6388,	

Pour faire cee quatre derniers Triangles on a pris 2042040, qui eſt l'aire des deux Triangles, primitifs 528, 7735, 7753, & 1001, 4080, 4201, laquelle diviſée par quatre, donne 510510, aire du primitif 715, 1428, 1597, qui eſtant multipliée par 2, racine de 4, donne 1430, 2856, 3194, qui a pour ſon aire 2042040, quadruple de 510510; & multipliant par 4 cette aire 2042040, on a 8168160, aire du primitif 935, 17472, 17497; & multipliant par 2 les trois Triangles cy-deſſus, qui ont 2042040 pour leur aire, on aura les quatre cy-deſſus, qui ont 8168160 pour leur aire.

TABLE DE QUATRE QUINAIRES

de Triangles qui ont une meſme aire.

2805,	52416,	52491,	
3168,	46410,	46518,	
6006,	24480,	25206,	aire 73513440.
5236,	28080,	28564,	
8580,	17136,	19164,	

Si

Si cette aire servoit à quelque Triangle primitif, elle seroit l'aire de six Triangles.

On ne met point les hypoténuses aux quinze Triangles suivans.

67234957,	56510961360,	
713346495,	5326320496,	
1141354392,	3328950310,	aire 1899756028534130760.
1902257320,	1997370186,	
1389419029,	2734604880,	

4680062014,	3933590730720,	
49654316490,	370752229792,	
79446906384,	231720143620,	aire 9204724278732587435040.
132411510640,	139032086172,	
180439977829,	102025331520,	

3253383668734,	6403193472480,	
4454216308720,	4676927124156,	
2672529785232,	7794878540260,	aire 10416022535555291732720160.
1670331115770,	12471805664416,	
6069855166717,	3432049776960,	

EXEMPLE DE SIX TRIANGLES qui ont une mesme aire.

3868273182124726,	7613397038778720,	8539751277503926,
3177637914640848,	9268110584369140,	9797716903475948,
7217057793226513,	4080707184805440,	8290844005220113,
1986023696650530,	14829876934990624,	14961378514767326,
187188440373958,	157331828456607840,	15733193981201558,
5296063191068080,	5560866350621484,	7679291627048716,

Aire commune 147253497949877625836728773153 60.

Tous ces Triangles sont premiers entre eux, c'est à dire, qu'ils ne sont point multiples de quatre, de cinq, ou de six autres Triangles; & si on les multiplie par quelque nombre que ce soit, on aura d'autres Triangles qui auront aussi une mesme aire.

ABREGÉ
DES
COMBINAISONS.

Par M. FRENICLE.

ABREGÉ

DES

COMBINAISONS.

On appelle combinaiſon le divers aſſemblage de pluſieurs choſes.

Il y en a de deux ſortes principales, chacune deſquelles ſe diviſe encore en d'autres. De ces deux jointes enſemble on en fait une troiſiéme qui eſt meſlée de ces deux, & encore une quatriéme qu'on nommera multiple, parce qu'elle ſe fait par la multiplication de chacune de ces ſortes.

La premiére ſera nommée combinaiſon d'ordre, la deuxiéme combinaiſon de changement, la troiſiéme meſlée, & la quatriéme multiple.

La combinaiſon d'ordre contient les façons différentes dont on peut arranger & diſpoſer pluſieurs choſes; par éxemple, en combien de ſortes on peut arranger quelque multitude de ſoldats, ou combien on peut faire de nombres différens avec quelques chiffres, ou combien on peut faire d'Anagrammes de quelque nom, ſoit qu'elles ſe puiſſent prononcer, ou qu'elles ne le puiſſent; & ce qu'on obſerve en cecy, & qui eſt la propriété particuliére de cette combinaiſon, eſt que les choſes une fois priſes ne doivent point eſtre changées, comme ſi on prend cette diction *Jaques*, on conſidérera la variété des diſpoſitions que peuvent recevoir les ſix lettres de cette diction, ſans qu'il ſoit permis de mettre quelque

autre lettre nouvelle outre ces six, ou d'en omettre quelqu'une.

Cette combinaison a plusieurs cas, ou une infinité, qui se réduiront à deux.

Le premier & le principal est quand toutes les choses combinées sont différentes, comme lors qu'il est question d'arranger des hommes, pas un desquels ne se peut trouver en deux lieux: ou lors qu'on fait les Anagrammes de quelque diction, dont toutes les lettres sont différentes, comme *Charité*.

Le second, qui dépend du premier, est quand parmi les choses combinées, il y en a de semblables, comme il arrive en faisant les Anagrammes des dictions qui ont quelques lettres semblables: par exemple, si on vouloit sçavoir combien on peut faire d'Anagrammes de cette diction *Pierre*, entre les six lettres de laquelle il y a deux *e*, & deux *r* qui se ressemblent.

Combinaison d'ordre.

L'ordre des choses différentes se trouve comme il s'ensuit.

On multiplie la combinaison de la multitude précédente par le nombre de la multitude donnée: ainsi pour avoir l'ordre de six choses, il faut multiplier l'ordre de 5 choses par 6; & pour avoir l'ordre de 5, on multipliera celuy de 4 par 5; & pour celuy de 4, on prendra le produit de l'ordre de 3 par 4; de mesme pour celuy de 3, on multipliera l'ordre de 2 par 3. Or l'ordre de 2 ne peut estre que 2, car deux choses ne souffrent que deux dispositions différentes, sçavoir en metant au premier lieu celle qui auparavant estoit au second, comme *B*, *A*. & *A*, *B*. On pourroit dire aussi que la combinaison de deux choses se trouve en multipliant celle de 1, qui est 1 par 2.

1	1.
2	2.
6	3.
24	4.
120	5.
720	6.
5040	7.
40320	8.
362880	9.
3628800	10.
39916800	11.
479001600	12.
6227020800	13.
87178291200	14.
1307674368000	15.
20922789888000	16.
355687428096000	17.
6402373705728000	18.
121645100408832000	19.
2432902008176640000	20.
51090942171709440000	21.
1124000727777607680000	22.

On trouvera cette combinaison poursuivie jusques à 64. in lib. Harmonicon, *du P. Mersenne. Pages.* 116. & 117.

Si on veut donc trouver l'ordre de quelque multitude, il faudra chercher celuy des multitudes précédentes, & faire la table de toutes, comme on voit icy.

La colonne qui est du costé droit contient le nombre de la multitude des choses dont un veut sçavoir l'ordre, c'est-à-dire la différente façon de les arranger : celle qui est du costé gauche contient l'ordre.

Je mets donc premiérement 1, tant à droit qu'à gauche, parce que l'ordre d'une chose n'est qu'un; puis je mets du costé droit le nombre suivant 2, par lequel je multiplie l'ordre du précédent, sçavoir 1, pour avoir 2.

Je mets aprés 3 au dessous de 2 à droit, & par ce nombre je multiplie l'ordre de 2, sçavoir 2; & on aura 6, qu'il faudra mettre prés de 3: en suite j'écris 4 dessous 3, & je multiplie par ce 4 l'ordre de 3, sçavoir 6, pour avoir 24. & ainsi de suite comme on voit en la table.

obie
obei
oibe
oieb
oebi
oeib
boie
boei
bioe
bieo
beoi
beio
iobe
ioeb
iboe
ibeo
ieob
iebo
eobi
eoib
eboi
ebio
eiob
eibo

Voicy la différente dispositíon qu'on peut donner à quatre choses, afin de faire voir de quelle façon on les arrangera pour n'omettre aucune disposition. On se proposera premiérement quelque ordre, comme en ces quatre lettres *o*, *b*, *i*, *e*. La premiére soit *o*, la seconde *b*, &c. il faut en retenant la premiére changer l'ordre des derniéres. Ainsi, ayant placé & disposé les quatre lettres selon cét ordre, je retiens *o*, que je laisse toûjours au premier lieu, & je change les trois autres *b*, *i*, *e*, en toutes les façons possibles qui sont 6, & pour ces 6, on observera encore la mesme régle; & ainsi parce que je trouve *b*, le premier des 3, je le retiens, & je change les deux autres *i*, *e*, en toutes les sortes, qui sont 2, sçavoir *i*, *e*, & *e*, *i*.

Cela fait je change le *b*, & en son lieu je mets la lettre suivante, sçavoir la troisiéme qui est *i*, & on aura *o*, *i*, & en suite je mets les deux autres *b*, *e* dans leurs deux rangs, & enfin aprés *o*, je mets la quatriéme lettre, sçavoir *e*, & je change encore les deux autres *b*, *i*, en leurs deux façons.

Et parce que la quatriéme lettre est la derniére, & qu'on ne peut plus en mettre d'autre au second lieu, je change la premiére lettre *o*, & en sa place je mets la seconde *b*, & en suite les trois autres selon leur ordre, sçavoir la premiére au second lieu, puis la troisiéme & quatriéme; & la seconde lettre *b*, demeurant ainsi au premier lieu, on fera les six changemens des autres trois, sçavoir de *o*, *i*, *e*, comme auparavant. Cela estant fait, on mettra la troisiéme lettre *i* au premier lieu, & on fera encore les six variations des trois autres

o, *b*, *e*;

o, *b*, *e*; & enfin on mettra la derniére *e*, au commencement, pendant que les trois autres *o*, *b*, *i* seront arrangées en six façons.

S'il y avoit cinq lettres différentes comme *Tobie*, on auroit en la mesme maniére que cy-devant les vingt-quatre changemens de *o*; *b*, *i*, *e*, le *T* demeurant toûjours le premier; puis on osteroit le *T* du premier lieu, & en sa place on mettroit *o*, aprés lequel on mettroit *T*, *b*, *i*, *e*, en vingt-quatre sortes; puis la troisiéme lettre *b* tiendroit le premier lieu, & enfin la quatriéme & la cinquiéme.

De mesme, si on avoit six lettres, on feroit le changement des cinq derniéres en cent vingt façons, & mettant chacune des six lettres au premier lieu, on aura six fois 120, sçavoir 720, pour les divers arrangemens des six choses.

Pour sept lettres on fera les 720 changemens des six derniéres, qui seront recommencez sept fois, à cause des sept lettres qui doivent occuper le premier lieu.

On trouvéra de la mesme sorte les diverses situations pour les autres multitudes, ce qui donne assez à connoistre la construction de la table précédente, & la raison pour laquelle il faut multiplier tous les nombres & leurs produits depuis l'unité jusqu'au nombre de la multitude requise, pour avoir la combinaison de quelque multitude: car ayant à disposer plusieurs choses d'un ordre différent, on commence à operer sur les trois derniéres; & gardant la premiére des trois, on range les deux derniéres en deux façons: & parce qu'il y a trois lettres différentes, on mettra chacune des trois pour la premiére, & aprés chacune on mettra les deux autres en deux façons. D'où il s'ensuit que pour avoir la combinaison de trois choses, il faut multiplier 2 par 3, dont le produit est 6.

Si on vient aprés à considerer quatre choses, on a montré comme les trois derniéres se peuvent varier en six façons: mais parce que chacune de ces quatre choses peut tenir le premier lieu,

& que les trois qui resteront se varient en six sortes, il faudra multiplier 6 par 4, pour avoir la variété de l'ordre de quatre choses, qui sera 24.

De mesme, si on a cinq choses, chacune doit estre mise la premiére, & à chacune de ces situations les quatre derniéres seront rangées en ving-quatre sortes : il faut donc multiplier 24 par 5. Pour avoir l'ordre de cinq choses, qui sera 120 ; & ainsi de suite, il faudra multiplier la combinaison précédente par le nombre de la multitude donnée ; & cela est une preuve évidente qui sert de démonstration pour la construction de la table.

Mais lors que dans une diction il y a plusieurs lettres semblables, comme en cette diction, *Beauté* ; il est certain qu'il n'y aura pas tant de variétez en l'ordre, que si toutes les six lettres estoient différentes ; & que les deux *e* qui s'y rencontrent diminuënt la multitude de ces variétez.

En ce cas, il faudra prendre la combinaison de l'ordre des lettres selon leur multitude, & la diviser par l'ordre qui appartient à la multitude des semblables : ainsi, pour sçavoir combien on peut faire d'anagrammes de la dicton, *Beauté*, on prendra la combinaison de l'ordre de six choses, qui est 720 ; & parce que dans la diction il y a deux lettres semblables, on divisera 720 par la combinaison de deux choses, qui est 2, le quotient 360 sera la multitude des Anagrammes requises.

ebene De mesme pour cette diction, *Ebene*, on prendra
ebeen 120, qui est la conbinaison de 5, à cause de ses cinq
ebnee lettres : mais parce que parmi ces cinq lettres il y en a
eebne trois semblables, je divise 120 par la combinaison de 3,
eeben sçavoir par 6, & le quotient 20 sera la multitude des
eenbe anagrammes de cette diction.
eeneb On voit icy les 20 variétez de ces cinq lettres, qui
eeebn pourront donner à connoistre comment on pourra faire
eeenb les variétez des situations, quand les choses ne sont pas
enbee toutes différentes.

enebe

enebe Que s'il y avoit plusieurs sortes de lettres semblables,
eneeb il faudroit diviser la combinaison de toutes les lettres par
beene celle de chaque sorte de semblable, comme aux dictions,
beeen *Pierre* & *George*, ausquelles il y a six lettres, mais deux
benee d'une sorte & deux d'une autre.
bneee Je prendray la combinaison de 6, sçavoir 720, & la
nebee diviseray par celle de 2, & le quotient 360 encore par
neebe celle de 2, & j'auray 180: ou bien je multiplieray la
neeeb combinaison de 2 par celle de 2, le produit sera 4, par
nbeee lequel je diviseray 720, & le quotient sera 180.

Pour avoir la combinaison ou la multitude des anagrammes de la diction, *Ananas*, je voy qu'elle a six lettres: je prens donc 720, qui est la combinaison de 6; & par ce qu'entre ces lettres il y en a trois d'une sorte & deux d'une autre, je divise 720 par la combinaison de 3, sçavoir par 6, & le quotient 120 par celle de 2, sçavoir par 2, & j'auray 60: ou bien je multiplie la combinaison de 3 par celle de 2, sçavoir 6 par 2, & par le produit 12 je divise la combinaison de la multitude des lettres, sçavoir 720, le quotient 60 donnera la multitude des varietez des lettres de cette diction.

Il semble que l'ordre demanderoit qu'on traitât en suite de la combinaison de changement ou de choix: mais parce qu'on trouve ses varietez par le moyen de la meslée, on traitera premiérement de celle cy, & on commencera par celle qu'on nomme générale.

Combinaison générale.

Cette combinaison est celle qui a esté appellée meslée, parce qu'elle contient tant l'ordre que le changement des choses. On la peut aussi diviser en deux espéces, comme les autres; sçavoir si on considére les choses toutes différentes; ou bien si on suppose qu'elles puissent estre toutes semblables, ou qu'il y en puisse avoir plusieurs semblables.

Cette derniére combinaison est la plus universelle de toutes, puis-

puiſqu'elle comprend toute ſeule tout ce qui eſt compris dans toutes les autres; car on y conſidére l'ordre comme en la premiére, & on prend les choſes dans une plus grande multitude, comme en la ſeconde; & outre cela on en peut prendre pluſieurs ſemblables ou toutes, comme ſi on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet, car par ce moyen les douze cartes pourroient eſtre ſemblables, & ainſi on pourroit avoir douze Rois de pique; ou ſeulement neuf ou dix cartes ſemblables, & les autres différentes, & en toutes les autres façons poſſibles; & l'ordre fera voir en combien de maniéres on les pourroit joüer & jetter ſur la table en toutes ces ſortes de jeux.

Cette combinaiſon ſe trouve, prenant la multitude des choſes pour l'expoſant d'une puiſſance, qui à pour racine la diverſité des choſes combinées: ainſi pour ſçavoir en combien de façons on peut avoir & arranger ou joüer les douze cartes priſes dans douze jeux de piquet de trente-ſix cartes chacun, afin qu'on en puiſſe avoir tant de ſemblables qu'on voudra, il faut prendre 36 pour racine, & 12 pour l'expoſant de la puiſſance.

Ce ſera donc la douziéme puiſſance de 36.

Si on ne prenoit qu'une carte, on n'auroit que 36 variétez.

Si on en prenoit 2, on auroit 1296 variétez, ſçavoir le quarré de 36.

Pour trois cartes, on prendroit le cube de 36. Pour quatre, le quarré quarré. Pour cinq, la cinquiéme puiſſance de 36. & ainſi des autres.

La vérité de cette opération ſe peut tirer ou du raiſonnement, ou de quelque éxemple. Nous en avons un éxemple aux chiffres, car il eſt certain qu'on les prend & diſpoſe en toutes les façons poſſibles, ſoit ſemblables ou différentes & priſes dans un plus grand nombre, & on a auſſi égard à l'ordre: or les nombres ſe ſuivent, & ne différent de proche en proche que de l'unité; d'où il s'enſuit que le dernier & plus grand nombre de ceux qui ont une cer-

certaine multitude de lettres, comprendra tous les précédens ; par éxemple, le plus grand nombre qui s'écrive par deux lettres ou chiffres est 99, qui comprend non-seulement les nombres de deux lettres, mais aussi ceux qui n'en ont qu'une ; mais il faut considérer que parmi ces nombres, il n'y en a aucun qui ait un zéro du costé gauche, & en la place des dixaines : on le pourra donc supposer au devant des neuf premiers chiffres où il ne signifie rien, en prenant 01, 02, &c. & ainsi on auroit 99, nombres de deux lettres. Mais il y en manque encore un, pour avoir toutes les combinaisons des dix caractéres pris deux à deux : car celuy qui seroit fait de deux zero, sçavoir 00, n'y est point ; il faudra donc ajouster 1, à 99 pour avoir en tout 100 variétez, que peuvent souffrir deux choses prises dans dix. Or le nombre 100 contient 10 & 2, car 10 est sa racine, & 2 son exposant.

Les mesmes nombres ou chiffres pourroient encore fournir un autre éxemple, sçavoir si on prenoit les deux choses dans neuf différentes, comme si on cherchoit tous les nombres de deux chiffres qui n'ont point de zero ; car par ce moyen on n'aura que neuf lettres : or en chaque dixaine il y a neuf nombres qui n'ont point de zero, & il n'y a que neuf dixaines qui ayent deux lettres, car les nombres de la premiére n'ont qu'une lettre : si donc on multiplie 9 par 9, on aura 81, qui est la variété requise de deux choses prises dans neuf ; c'est la mesme chose aux autres quantitez. Mais voicy comme on fera voir la verité de cette règle.

Pour ne point sortir de nostre éxemple de neuf, on voit premiérement que si on ne prend qu'une seule chose dans neuf différentes, on n'aura que 9 variétez : mais si on prend deux choses, puisqu'aprés chacune des neuf choses on peut mettre chacune des mesmes l'une aprés l'autre ; pour avoir cette variété, il faudra multiplier 9 par 9, & on aura 81, qui est le quarré de 9.

Que si on prend trois choses dans les neuf, on pourra devant chacune des 81 combinaisons précédentes mettre chacune des

 neuf

neuf choſes : il faudra donc, pour avoir la variété de trois choſes priſes dans neuf, multiplier 81 par 9, pour avoir 729 cube de 9.

Et ainſi continuant, on fera voir que pour avoir la variété de quatre choſes priſes dans neuf, il faut multiplier 729 par 9, pour avoir le quarré quarré de 9, parce que devant chacune des 729 façons dont on aura pris & arrangé trois choſes, on pourra mettre chacune des neuf dans leſquelles on les a priſes.

De meſme, pour cinq choſes priſes dans neuf, on prendra la cinquiéme puiſſance de 9, &c.

Il faut ſeulement prendre garde que la diverſité des choſes qu'on prend, comme eſt icy 9, ſert toûjours de racine, & la multitude des meſmes choſes ſert d'expoſant.

Combinaiſon de changement ou de choix.

La ſeconde eſpéce de combinaiſon eſt nommée de changement, ou de choix, à la différence de la premiére, où on ſuppoſe que les meſmes choſes demeurent toûjours : mais en celle-cy, on les varie, & on en fait comme divers amas pris dans une grande multitude. Par éxemple, ſi d'un Régiment de 1000 hommes, on en détache 100, & qu'on veuille ſçavoir en combien de ſortes on peut faire une Compagnie de 100 ſoldats pris dans un Régiment de 1000; ou bien ſi on veut ſçavoir en combien de ſortes on peut avoir les douze cartes du jeu de piquet, où il y en a trente-ſix; on voit manifeſtement que l'ordre ne fait rien à cette multitude, car la différente diſpoſition des cartes dans la main ne change rien au jeu, encore qu'on puiſſe bien avoir égard à l'ordre tant aux ſoldats en les arrangeant diverſement, qu'aux cartes en les joûant de pluſieurs maniéres.

Cette combinaiſon ſera auſſi diviſée en deux eſpéces comme la précédente, ſçavoir celle en laquelle toutes les choſes ſont différentes, comme en l'aſſemblage des ſoldats, & celle en laquelle

il

il se trouve plusieurs choses semblables; comme si on avoit un cent de diverses sortes de fruits, sçavoir de chacune espéce un cent, & qu'on voulust sçavoir en combien de façons on pourroit remplir un panier d'un cent de ces fruits, ou bien si on avoit ensemble douze jeux de piquet, & qu'on voulust voir en combien de sortes on pourroit avoir douze cartes à les prendre dans ces douze jeux.

Pour trouver la multitude des choix, il faut remarquer que toute combinaison meslée estant divisée par l'ordre, donne la combinaison de changement, pourveû que toutes les choses soient différentes, ou qu'il y en ait toûjours autant de semblables.

Exemple. Si on avoit six paniers dont chacun fut plein d'une espéce de fruit différent des autres, mais égaux entre eux, & qu'on voulust voir en combien de façons on pourroit prendre un cent de ces fruits dans les six paniers, supposant toûjours que dans chaque panier tous les fruits soient égaux, & qu'il n'y ait rien à choisir, de sorte que chaque espéce de fruit soit réputée pour un mesme fruit, ainsi que les lettres de l'Alphabet, chacune desquelles ne différe en rien de sa semblable en ce qui regarde l'usage qu'on en fait dans les dictions; & ainsi dans la diction, *Anna*, le premier *a* n'est pas autre que le second: or on entend que les fruits d'une mesme espéce soient icy pris en la mesme façon que les lettres.

Si donc on veut avoir la variété des sortes de choix qu'on peut faire d'un cent de ces fruits dans les six paniers, dans chacun desquels il faut supposer aussi qu'il y ait pour le moins un cent de fruits, afin que si on veut on puisse prendre un cent de ces fruits tous égaux, il faut faire la combinaison générale de cent choses prises dans six sortes de choses, si on y comprend aussi l'ordre.

Et parce que la variété des choses est 6, ce nombre sera la racine, & 100 qui est la multitude des choses qu'on prend servira

 d'ex-

d'expoſant. On prendra donc la centiéme puiſſance de 6 pour la variété des diverſes façons dont on pourroit prendre & arranger les fruits pris dans les ſix panier.

Et parce que la combinaiſon générale contient la combinaiſon de l'ordre en toutes les façons poſſibles, tant des choſes ſemblables que des différentes, dont l'ordre eſt différent, on ne la peut pas diviſer par l'ordre; car la ſomme de pluſieurs diviſeurs donne un autre quotient que s'ils eſtoient ſéparez, c'eſt-à-dire, que ſi on diviſoit ſéparément par chacun d'eux; joint que quelques-unes de ces variétez n'ont point d'ordre, c'eſt à-dire, ne ſe peuvent mettre qu'en une ſeule façon, comme lorſque les choſes qu'on a priſes ſont toutes ſemblables, & les autres, où il ſe trouve pluſieurs choſes ſemblables, ont fort peu de variétez d'ordre, par éxemple, ſi on a quatre choſes, elles ſeront conſiderées confuſément, ſoit qu'on les prenne toutes differentes, comme *a*, *b*, *c*, *d*, ou deux ſemblables, & deux autres differentes, comme *a*, *a*, *b*, *c*, ou trois ſemblables, & une autre comme, *a*, *a*, *a*, *b*, ou deux d'une ſorte & deux d'une autre, comme *a*, *a*, *b*, *b*, ou enfin toutes quatre ſemblables comme, *a*, *a*, *a*, *a*, ou, *b*, *b*, *b*, *b*.

A, *b*, *c*, *d* ſe change en ving-quatre façons; *a*, *a*, *b*, *c* en douze; *a*, *a*, *a*, *b* en quatre; *a*, *a*, *b*, *b* en ſix, & enfin *a*, *a*, *a*, *a*, ne peut eſtre diſpoſé que d'une ſorte, & n'a aucun ordre: mais voicy comme on en ſéparera l'ordre.

Nous avons dit que la combinaiſon de changement eſtoit de deux ſortes: l'une où toutes les choſes ſont différentes comme aux douze cartes du piquet; l'autre où elles peuvent eſt indifféremment, ou toutes differentes, ou toutes ſemblables, ou en partie diſſemblables & en partie ſemblables, comme ſi on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet.

Pour l'une & l'autre ſorte de choix, il faut faire douze nombres par multiplication compris le premier qu'on multiplie, qui eſt 36, à cauſe qu'il y a trente ſix ſortes de choſes: mais pour le pre-

premier où tout eſt différent, il faut multiplier par les nombres inférieurs, ſçavoir par 35, & le produit par 34, &c. & pour le ſecond qui peut avoir des choſes ſemblables, il faut multiplier par les ſupérieurs, ſçavoir par 37, 38, &c.

Ce qu'il faut obſerver en cecy eſt que le nombre par lequel on commence les multiplications eſt celuy de la variété, & la multitude des nombres qu'il faut trouver par les multiplications le premier compris, eſt la multitude des choſes.

Ainſi voulant avoir toutes les façons du jeu de piquet, ſçavoir, de douze cartes priſes dans trente-ſix, en ſorte qu'elles ſoient toutes différentes, je prens 36 pour le terme & commencement des multiplications; & parce que toutes les cartes doivent eſtre différentes, il faudra multiplier 36 par les nombres précédens moindres, ſçavoir, par 35, & le produit 1260 par 34, pour avoir 42840, qu'il faudra encore multiplier par 33, & continuer tant qu'on ait douze nombres, ce qui ſe fera aprés onze multiplications, & le dernier nombre par lequel il faûdra multiplier ſera 25, ſçavoir 11 moins que 36; car on prend toûjours un moins que la multitude des choſes, à cauſe que le nombre de la variété, ſçavoir 36, eſt pris pour le premier nombre.

Le dernier produit eſt 599555620984320000, qui contient la variété de douze cartes priſes en trente-ſix avec l'ordre, c'eſt-à-dire ſuppoſant qu'on les arrange auſſi en toutes les façons poſſibles, qui eſt le premier cas, ou premiére ſorte de la combinaiſon meſlée, qui ſuppoſe toutes les choſes différentes, mais priſes en un plus grand nombre, & ſuppoſant auſſi l'ordre.

Que ſi on veut avoir les jeux de piquet ſans l'ordre, puiſque cét ordre ne change point le jeu, il faudra diviſer le nombre trouvé 599555620984320000 par la combinaiſon de l'ordre de douze choſes, ſçavoir par 479001600, & on aura 1251677700 variétez de jeux de piquet.

Pour ce qui eſt de joüer & de jetter les cartes ſur la table, il faut avoir égard à l'ordre, & chaque jeu ſe peut joüer en

479001600 sortes, car telle est la combinaison de l'ordre de douze choses, & ainsi pour avoir en tout en combien de sortes on peut joüer les douze cartes prises en 36, il faut multiplier 1251677700 par 479001600, pour avoir le nombre cy-devant trouvé 599555620984320000, qui montre en combien de façons on peut avoir & joüer les douze cartes.

Voilà pour ce qui appartient à la combinaison de changement, & à la combinaison meslée lors que toutes les choses sont différentes.

Car la meslée, où l'ordre est compris se trouve comme on a veû multipliant le nombre de la variété des choses, comme 36 par les nombres précédens 35, 34, &c. tant qu'on ait autant de nombres ou produits compris 36, que la multitude des choses, qui est 12, & prenant le dernier produit pour le nombre requis.

Et la combinaison de changement se trouve divisant ce nombre, sçavoir le dernier produit, par le nombre de la combinaison d'ordre de la multitude des choses, qui est icy 12.

Reste à donner un éxemple de la mesme combinaison de changement, lors que les choses peuvent estre semblables.

Que les douze cartes se prennent dans douze jeux de piquet de trente-six cartes chacun, afin qu'elles puissent estre toutes semblables, il faudra, comme on a dit cy-devant, multiplier 36 par les nombres suivans, sçavoir par 37, 38, &c. tant qu'on ait 12 nombres ou produits, sçavoir autant que la multitude des choses, & ainsi le dernier nombre qui multipliera sera 47, puis diviser le produit par l'orde du nombre de la multide, sçavoir par l'ordre de 12.

De mesme pour les six paniers de fruit dans tous lesquels on choisit cent fruits à discrétion, avec liberté de prendre si on veut tous les cent de mesme espéce, & d'un mesme panier.

Parce que le nombre de la variété est 6, je prens 6 pour le terme ou commencement des multiplications; je le multiplie donc par-

par 7, & le produit 42 par 8, & le produit par 9, tant qu'on ait 100 nombres, compris 6, & ainsi le dernier nombre qui multipliera sera 105, qui surpasse 6 de 99, sçavoir de 1 moins que le nombre de la multitude 100, à cause que 6 est conté pour le premier nombre; & le dernier produit estant divisé par l'ordre de cent choses, qui est la multitude des choses qu'on prend, donnera le nombre requis.

Que si on avoit des tables faites de la combinaison d'ordre, qui est la plus ordinaire & la plus en usage, on y pourroit prendre la combinaison de 105, sçavoir de 1 moins que la somme des deux nombres de variété & de multitude, & la diviser par la combinaison de 5, sçavoir de 6--1; car si on avoit commencé par 2 à multiplier, & qu'on eust continué jusques à 105, on auroit la combinaison de 105: mais parce qu'on n'a commencé que par 6, il s'ensuit que le produit devroit estre multiplié par la combinaison de 5 pour parvenir à celle de 105; & par conséquent, si on divise celle de 105 par celle de 5, on aura le nombre requis, qui doit estre divisé par celle de 100, comme il a esté dit.

Mais parce que de si grandes divisions & multiplications sont ennuyeuses, on se pourra servir du moyen suivant pour se passer de la division, & diminuer beaucoup les multiplications.

Nous prendrons l'exemple de jeux des piquet dans les deux façons précédentes.

1° On prend douze cartes dans trente-six toutes différentes, & on demande en combien de sortes je puis avoir les douze cartes: parce que 36 est la variété des choses, il me servira de terme; & parce qu'il y a douze choses, je prens 12 nombres, compris 36; car la multitude des nombres qui se multiplient doit suivre la multitude des choses qui se combinent: & parce que les cartes sont toutes différentes, & qu'il n'y en a point de semblables, je prens les nombres moindres que 36, comme on voit icy, sçavoir 36, 35, 34, &c. le produit desquels il faudroit diviser par la combinaison d'or-

d'ordre de douze choses, laquelle combinaison se trouve, en multipliant l'un par l'autre tous les nombres jusqu'à 12, sçavoir 1, 2, 3, &c.

Puis donc que le produit des nombres inférieurs doit diviser celuy des supérieurs, il faut que les inférieurs se trouvent tous séparément dans les supérieurs, autrement leur produit ne diviseroit pas l'autre grand produit.

Que les inférieurs soient donc ostez des supérieurs, & la division sera faite, comme on voit icy.

7. 9.
~~36~~. ~~35~~: 34, ~~33~~, ~~32~~, 31, ~~30~~, 29, ~~28~~, ~~27~~, 26, 25.
2 3
~~1~~. ~~2~~. ~~3~~. ~~4~~. ~~5~~. ~~6~~. ~~7~~. ~~8~~. ~~9~~. ~~10~~. ~~11~~. ~~12~~.

Je considére donc les supérieurs, & je trouve premiérement 36, qui est le produit de 3 & 12; j'oste donc 36 de la ligne supérieure, & 3 & 12 de l'inférieure.

Je viens à 35, qui est produit par 5 & 7; j'oste donc 35 d'un costé, & 5 & 7 de l'autre.

34 est fait de 2 & 17; mais parce que 17 n'est point en la ligne inférieure, je passe a une autre, & considére 33, qui est produit par 3 & 11; j'oste donc 33, & de la ligne inférieure j'oste 3 & 11; mais parce que le nombre 3 ne s'y trouve plus, je l'oste de quelque composé de la mesme ligne inférieure, comme de 9, & je remets un 3 dessus, parce que 9 est fait & produit de deux 3.

32 est fait de 4 & 8; j'oste donc 32 de la ligne supérieure, & 4 & 8 de l'inférieure. 31 est nombre premier.

30 est fait de 3 & 10; j'oste donc 30, & de la ligne inférieure j'oste 3 & 10, sçavoir le 3 que j'avois mis sur le 9.

Il ne reste plus en bas que 2 & 6: le 6 est fait de 2 & 3; joste donc 3 de quelque nombre de la ligne supérieure, comme de 27, reste

reste 9, que j'écris dessus 27; & ostant ainsi le 3 de 6, reste 2, que j'écris sur 6, (car icy, où il est question de parties qui font le nombre par multiplication, oster un nombre c'est diviser par ce nombre.)

Enfin il reste en bas 2 & 2, qui font 4, que j'oste de quelque nombre de la ligne supérieure, comme de 28, reste 7, que j'écris dessus, & j'oste tant 28 que les deux 2 de la ligne inférieure.

Reste donc en la ligne supérieure à multiplier, 34, 31, 29, 7, 9, 26, 25, l'un par l'autre, dont le produit fait 1251677700 pour la diversité des jeux piquet, comme on avoit trouvé cy-devant.

Que si on prend les douze cartes dans douze jeux de trente-six cartes chacun, les douze cartes pourront estre semblables: il faut donc prendre 12 nombres, suivant la multitude des cartes, à commencer par 36, qui représente la variété des cartes, & poursuivant par les nombres plus grands, comme on voit icy, il faudroit diviser le produit des supérieurs par celuy des inférieurs: mais pour épargner cette division, on ostera les semblables comme cy-devant, sçavoir pour 36, on ostera 3 & 12.

		19.								23.	
~~36.~~	37.	~~38.~~	39.	~~40.~~	41.	~~42.~~	43.	~~44.~~	~~45.~~	~~46.~~	47.
							2.				
1.	~~2.~~	~~3.~~	~~4.~~	~~5.~~	~~6.~~	~~7.~~	8.	~~9.~~	~~10.~~	~~11.~~	~~12.~~

Pour 40, 14 & 10. pour 42, 6 & 7. pour 44, 11 & 4.

Mais parce qu'il n'y a point de 4, on le prendra dans 8, & on mettra un 2 dessus. Pour 45 on ostera 5 & 9, & il restera 2 & 2 en la ligne inférieure: on en ostera l'un de 38, & l'autre de 46, restera 19 & 23, qu'on écrira dessus.

Restera donc 37, 19, 39, 41, 43, 23, 47, qu'il faut multiplier l'un par l'autre; le produit 5225140085 1 sera la variété

réquise des jeux qu'on peut avoir, sçavoir de douze cartes prises dans douze jeux de trente-six cartes chacun.

Corollaire premier.

De ce qui a esté dit, il s'ensuit que tout nombre qui dénote la variété des choses différentes sans l'ordre, dénote aussi la variété de quelques autres, entre lesquelles toutes ou quelques-unes peuvent estre semblables pareillement sans l'ordre. Exemple.

Le nombre qui montre la variété de douze cartes prises dans trente-six, montre aussi la variété de douze cartes prises dans douze jeux de vingt-cinq cartes chacun, c'est-à-dire, supposant douze jeux semblables, chacun desquels auroit vingt-cinq cartes différentes.

La raison se tire de l'opération, car aux deux cas des cartes différentes ou semblables, on prend le nombre de la variété pour le premier; & si les choses sont différentes, on prend les nombres moindres; que si elles peuvent estre semblables, on en prend autant qui soient plus grands que le nombre de variété : mais si du grand nombre comme 36, on descend au moindre 25, & qu'on multiplie les nombres qui sont entre deux, comme il a esté dit, on aura le mesme produit, que si on prend 25 pour le nombre de la variété, & qu'on monte jusqu'à 36 : mais le premier se fait quand les choses sont différentes, & le sécond quand elles peuvent estre semblables : donc un mesme nombre montre la combinaison des choses différentes, & de celles aussi qui peuvent estre semblables, en le divisant par la combinaison d'ordre de douze choses: mais des deux nombres qui sont les extrémes de ceux qui le multiplient, le plus grand sera la variété des choses quand elles sont toutes différentes, comme 36; & le moindre comme 25, quand les choses peuvent estre toutes semblables.

De mesme, le nombre qui représente la diversité ou combinaison de douze cartes prises en douze jeux de trente-six cartes cha-

chacun, montre aussi la combinaison de douze cartes prises en quarante-sept.

Ainsi pour passer des cartes semblables aux différentes, on change la variété des cartes, & on prend le douziéme nombre en augmentant si on se sert de douze cartes chaque fois, & au lieu de 36, on aura 47.

Mais pour passer des choses différentes aux semblables, il faut prendre le douziéme nombre en diminuant, & au lieu de 36, on prend 25, car le nombre de la multitude, sçavoir 12, ne change point.

Corollaire second.

Lors qu'on prend les douze cartes dans douze jeux de cartes, afin qu'elles puissent estre toutes semblales, on les peut considérer avec l'ordre, ou sans l'ordre: si on y met l'ordre, il se faut servir des puissances quarrées; si on n'y met point l'ordre, on se servira des puissances triangulaires.

On nomme icy puissance quarrée celle qui se fait par multiplication de la racine par elle-mesme, puis du produit par la mesme, &c. comme sont les puissances ordinaires.

On nomme puissance triangulaire celle qui se fait par l'addition des puissances qui ont 1 moins d'exposant depuis la premiére, qui est 1 jusques à celle qui a pareille racine: ainsi la sixiéme puissance triangulaire de 5 est la somme des cinq premiéres cinquiémes puissances, & la cinquiéme puissance de 5 est la somme des cinq premieres quatriémes puissances, & la quatriéme puissance de 5 la somme des cinq premiers tétraédres, ou troisiémes puissances, & le tétraédre de 5 est la somme des cinq premiers triangles, comme le cinquiéme triangle, ou le triangle de 5 est la somme des cinq premiers nombres.

On voit une table desdites puissances triangulaires jusqu'à la douziéme puissance de 25. in lib. Harmonicon. du P. Mersenne, *page 136.*

En chaque sorte on prend pour racine la variété des choses, & pour exposant leur multitude: ainsi pour avoir les douze cartes lors qu'elles peuvent estre semblables avec l'ordre, on prend la dou-

douziéme puissance quarrée de 36, parce qu'il y a de trente-six sortes de cartes; mais si on prend les mesmes douze cartes sans y joindre l'ordre, il faudra prendre la douziéme puissance triangulaire de 36.

Corollaire troisiéme.

On pourra tirer delà une régle bien facile pour avoir les puissances triangulaires. On demande, par éxemple, la sixiéme puissance triangulaire de 5, la racine est 5, & l'exposant est 6, on prendra six nombres de suite dont la racine 5 sera le moindre, sçavoir 5, 6, 7, 8, 9, 10; il les faut multiplier l'un par l'autre, & diviser le produit par l'ordre de la multitude des nombres, qui est représentée par l'exposant 6, & cét ordre est 720, ou bien, pour éviter la division, on ostera de ces six nombre, les six nombres premiers, 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme on a veû cy-devant, & il restera 7, 3 & 10. dont le produit 210 est la puissance réquise sçavoir la sixiéme puissance triangulaire de 5.

3.
5. 6. 7. 8. 9. 10.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Déterminer en combien de façons trois dez peuvent faire leurs points.

POUR dire en général combien ils peuvent faire de divers points, il faut cuber 6, & l'on a 216; mais pour sçavoir en particulier comment chaque point se peut faire, nous disons ainsi. Depuis 3 jusqu'à 18 nous avons seize nombres, les huit premiers se rapportent aux huit derniers, c'est-à-dire que 3 & 18 sont égaux à 4 & 17; 5 & 16 valent 6 & 15; 7 & 14 valent 8 & 13, &c. Or pour avoir en combien des maniéres chaque nombre peut venir: pour les six premiers, ou pour les six derniers, il faut prendre les six premiers triangles, ainsi l'on pourra améner 3 ou 18 en une sorte, car le premier triangle est 1: 4 ou 17 en trois

sortes

ſortes, car 3 eſt le ſecond triangle : 5 ou 16 en ſix façons, car le troiſiéme triangle eſt 6 ; 6 ou 15 en dix ſortes, car 10 eſt le quatriéme triangle : 7 ou 14 en quinze ſortes, parce que 15 eſt le cinquiéme triangle : 8 ou 13 en vingt & une ſortes, dautant que 21 eſt le ſixiéme triangle ; & voilà pour les ſix premiers, & pour les ſix derniers. Pour les quatre reſtans, ſçavoir 9, 12, 10, 11. Pour 9 & 12, il faut prendre le quarré de 5, c'eſt-à-dire 25, & pour 10 & 11, il faut prendre le cube de 3, qui eſt 27, & ces deux nombres 25 & 27 déterminent les diverſes maniéres dont ſe trouvéront ces quatre derniers. Or toutes ces façons différentes, ſçavoir, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, eſtant jointes enſemble, font 108, & les doublant nous aurons 216, qui eſt le cube de 6, que nous avons pris au commencement.

Queſtion ſur la régle d'Intéreſt.

Un homme met un ducat à la Banque à multiplier pour 32 ans, à la charge d'en avoir les intéreſts, & intéreſt d'intéreſt à raiſon de 5 pour 100. On demande à combien ſe montera le principal & les intéreſts au bout de ce temps.

L'intéreſt eſt $\frac{1}{20}$ par an ; donc au bout de l'an le principal avec l'intéreſt ſe montera à $\frac{21}{20}$ de ducat.

Pour les années ſuivantes il faut prendre les puiſſances du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & en faire une fraction, & le nombre des années ſera l'expoſant de ces puiſſances : il faudra donc prendre la trente-deuxiéme puiſſance de 21 & de 20 pour le pricipal & les intéreſts de 32 ans. J'ay pris 32 pour la commodité de la multiplication, à cauſe qu'il n'y aura qu'à prendre le quarré des nombres précédens. Ainſi

Pour 2 ans on aura $\frac{441}{400}$ de ducat.

Pour 4 ans $\frac{194481}{160000}$, qui ſe trouve prenant le quarré de $\frac{441}{400}$.

Pour 8 ans $\frac{37822859361}{25600000000}$.

Pour 16 ans $\frac{1430568690241985328521}{65536000000000000000}$.

Enfin pour 32 ans on aura $\frac{204652677750066936832934163810262216479041}{429496729600000000000000000000000000000000}$, qui font $4\frac{3}{4}$ ducats peu plus : le profit sera donc $3\frac{3}{4}$ ducats & un peu plus, & ainsi il sera presque quadruple du principal.

Si on vouloit continuer à calculer l'interest pour quelques autres années, il faudroit multiplier le numérateur par 21, & le dénominateur par 20 : mais pour éviter la difficulté de ces grands nombres, il faut rétrancher une partie de la fraction qui n'apporte pas un profit considérable & prendre seulement $\frac{20465267775}{4294967296}$. Donc pour 33 ans on auroit $\frac{429770623275}{85899345920}$ qui est un peu plus de 5 ducats, qui feroient 4 ducats de profit. Et si on l'y laissoit encore une autre année, on auroit $\frac{9025183088775}{1717986918400}$, qui sont 5 ducats $\frac{1}{4}$ peu plus, c'est donc 4 ducats $\frac{1}{4}$ de profit.

Des Combinaisons multiples.

On a considéré de deux sortes de Combinaisons ; l'une d'ordre, & l'autre de variété ou changement, chacune desquelles peut estre multipliée : en voicy des éxemples.

Six choses se peuvent ranger en 720 façons : que ce soient par éxemple six soldats à qui je donneray six sortes d'armes : parce que les armes se peuvent encore combiner en 720 façons, il faudra prendre le quarré de 720, & on aura 518400 façons de les ranger & de les armer : mais si avec cela on leur donne six sortes de livrées, il faudra prendre le cube de 720 pour la variété dont on les pourra ranger avec leurs diverses armes & livrées, ce qui se fera en 373248000 façons.

Mais si on n'avoit pas autant de sortes d'armes & de livrées que de soldats ; par éxemple, si on n'avoit que de quatre sortes d'armes, & que de l'une des sortes on en eust trois, comme si on avoit trois épées, un mousquet, une pique, & une hallebarde, & qu'on n'eust que trois sortes de livrées, sçavoir deux de chaque

sorte :

ſorte : il faudra prendre pour les armes la combinaiſon de ſix choſes entre leſquelles il y en auroit trois ſemblables : or on a fait voir que pour avoir cette combinaiſon, il faut diviſer la combinaiſon de ſix, ſçavoir 720, par ſix qui eſt la combinaiſon des trois choſes ſemblables, & on aura 120 pour les diverſes façons dont on peut armer ces ſoldats. On multipliera donc 720 par 120, & on aura 86400 maniéres de ranger & d'armer ces ſoldats.

Pour leurs livrées, parce qu'il y en a deux de chaque ſorte & de trois ſortes en tout, il faudra diviſer 720 par la combinaiſon de deux choſes répétées trois fois, qui eſt huit, parce que deux multipliant deux fait quatre, qui eſtant encore multiplié par deux donne huit : diviſant donc 720 par huit, on aura 90, par lequel il faudra multiplier le produit qu'on vient d'avoir, qui eſt 86400, & on aura en tout 7776000 maniéres d'arranger ces ſoldats avec leurs armes & leurs livrées différentes.

Que ſi au contraire on avoit plus de ſortes d'armes & de livrées qu'il n'y a de ſoldats ; par éxemple, ſi on avoit ſept ſortes d'armes & huit ſortes de livrées qu'on vouluſt donner à ſix ſoldats en toutes les maniéres poſſibles, on ſe ſerviroit de la combinaiſon de variété : voicy comme ſe fait cette combinaiſon.

Pour les armes, parce qu'il y en a de ſept ſortes, mais qu'on en prend que ſix à chaque fois, on multipliera 7 par les nombres moindres juſques à ce qu'on ait 6 nombres, ſçavoir juſqu'à 1 : on multipliera donc 7 par 6, le produit 42 par 5, puis le produit par 4, 3, & 2, on aura 5040, qui eſt le meſme nombre que celuy de la combinaiſon d'ordre de ſept choſes, parce que 1 ne multiplie point.

Pour les livrées, parce qu'il y en a de huit ſortes, & qu'on ne ſe ſert que de ſix, il faudra prendre le changement de ſix choſes priſes dans huit, qui ſe trouve en multipliant l'un par l'autre ſix nombres commençant par 8 en diminuant ; ſçavoir 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le produit eſt 20160 y compris l'ordre.

Il

Il faudra donc multiplier 720, qui montre la quantité de façons dont on peut ranger six soldats, par 5040, qui est la variété de leurs armes, & le produit 3628800 (qui contient l'ordre des soldats & des diverses maniéres dont on les peut armer) par 20160, qui est la variété des livrées, on aura 73156608000, qui montre toutes les façons d'arranger ces soldats, & de leur donner diverses armes & livrées.

La combinaison de variété se peut aussi multiplier par une autre combinaison de variété.

On a six places à pourvoir de Commandans, mais on n'en veut placer d'abord que trois: on demande en combien de maniéres on peut placer dans trois de ces places trois de ces Commandans pris dans six qui sont arrestez. On prendra l'ordre de trois choses prises dans six, multipliant six par cinq, & le produit par quatre; puis divisant le produit 120 par six, qui est la combinaison d'ordre de trois choses, on aura 20 pour le changement de trois choses prises dans six; ou par abrégé on multipliera seulement cinq par quatre. La combinaison de trois places prises dans six est pareillement 20; on multipliera donc 20 par 20, & on aura 400 façons de placer trois de ces Commandans chacun dans l'une des six places.

Or il n'importe pas qu'il y ait autant de places que de Commandans: il y en peut avoir plus ou moins, & la régle sera toûjours la mesme.

Si par éxemple, il n'y avoit que cinq places, il faudroit prendre la variété de trois choses prises dans cinq, qui est 60, l'ordre compris, qui estant divisé par six qui est l'ordre de trois choses, on a dix, lequel multiplié par 20, qui est la combinaison de trois Commandans pris dans six, on auroit 200 façons de les placer. De mesme s'il y avoit huit places on prendroit la combinaison de trois pris dans huit, qui est 336 compris l'ordre, qui estant divisé par six, qui est l'ordre de trois choses, donne 56, qui multiplié par 20 donneroit 1120 façons de placer ces trois Commandans. Il

Il y a quelqu'autre chose à considérer dans la combinaison pour l'assemblage des lettres qui forment les dictions : il y en a quelques-unes qui ne se peuvent prononcer quand elles sont ensemble, c'est pourquoy il est nécessaire de les séparer.

On veut sçavoir, par éxemple, combien on peut faire de dictions des huit lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *i*, *o*, *s*, à telle condition que les trois *b*, *c*, *d*, ne se trouvent jamais ensemble. Il faudra considérer ces trois lettres comme une seule, & ainsi il n'y aura que six choses, dont la combinaison est 720 : mais parce que ces trois lettres se peuvent trouver de suite en six façons, il faut multiplier 720 par six ; le produit est 4320, qu'il faut oster de la combinaison de huit choses qui est 40320, restera 36000 dictions ou anagrammes qu'on pourra faire avec ces huit lettres sans que *b*, *c*, *d* se trouvent ensemble.

On pourroit encore demander que deux de ces consones ne se trouvassent jamais au commencement ni à la fin des dictions. Pour le trouver il faut voir combien il se fait de changemens pendant que deux de ces lettres sont au commencement ou à la fin ; & parce qu'il reste six lettres, on aura 720 changemens : mais entre ces 720 il y en a 120 ausquels la troisiéme consone se trouve contre les deux autres, & cela est compris dans les 4320 qu'il a fallu oster de 40320 ; il faut donc oster 120 de 720, reste 600 qu'il faudra multiplier par 12, parce qu'on peut prendre les deux lettres dans les trois en trois façons ; & à cause de l'ordre il faudra multiplier trois par deux ; & parce qu'il ne faut pas aussi que les deux lettres se trouvent à la fin, on aura douze variétez, qui multipliées par 600 donnent 7200 qu'il faut oster de 36000, restera 28800 anagrammes.

Pour sçavoir en quel rang est une diction dans le grand nombre de la combinaison générale à commencer à celles d'une lettre, puis à celles de deux, de trois, & ainsi du reste, jusqu'au nombre des lettres dont nostre diction sera composée, comme l'on fait aux chifres où l'on commence à compter par les nombres qui n'ont

qu'un chifre, puis on vient à ceux qui en ont deux, &c.; il faut voir la quantiéme est la premiére lettre à main gauche dans l'alphabet, & de combien de lettres est composée la diction: par éxemple, je veux sçavoir le quantiéme est ce mot *Aser*, qui est de quatre lettres, dont il y en a 234256, & les autres dictions moindres y estant ajoustées, sçavoir celles de 3, 2 & une lettre, il y en aura 245410. Pour sçavoir donc le quantiéme il est dans ce dernier nombre à commencer à compter par *a*, puis *b*, &c, en aprés *aa*, *ab*, &c; je prens la premiére lettre *A*, qui est la premiére de toutes, & ne vaut qu'un mille, qui vaut 10648 (nombre des mots de trois lettres) puis je viens à *s*, qui est la dix-septiéme centaine, & partant je multiplie 484 par 17, le produit est 8228; puis à *e*, qui est la cinquiéme dixaine dont chacune vaut 22, qui multiplié par cinq, font 110; la derniére lettre est *r*, qui est la seiziéme, puis j'ajouste ces quatre sommes ensemble, scavoir 10648, 8228, 110 & 16, le total est 19002; de sorte que *Aser* est le 19002 mot dans le nombre de 245410, ou si l'on veut, dans le dernier nombre de la combinaison générale de 22, qui est l'addition de tous les autres.

Le lieu de ce mot *Baal* se trouve ainsi: il est composé de quatre lettres, & partant la premiére à gauche est mille, qui exprime son nombre 10648 fois, & cette lettre *B* est la deuxiéme lettre, partant il faut multiplier ce nombre par deux, ce sera 21296; la séconde lettre est *a*, qui est centaine, & qui vaut 484; la troisiéme est encore *a*, qui est dixaine, & qui vaut 22; la derniére est *l*, qui est la dixiéme lettre, partant il faut assembler 21296, 484, 22 & 10, & on trouvéra que *Baal* sera le 21812 mot.

Le lieu de *Levi* se trouve ainsi; *L* est la dixiéme lettre, & partant je multiplie le mille qui est 10648 par 10, le produit est 106480; *e* est la cinquiéme lettre: je multiplie donc 484 par cinq, le produit est 2420; *v* est la dix-neuviéme lettre que je multiplie par 22, le produit est 418; *i* qui est la derniére, est la

la neuviéme; j'assemble donc 106480, 2420, 418 & 9, & je trouve que *Levi* est la 109327 diction.

Toutes les autres dictions se trouvent de mesme, soit qu'elles ayent plus ou moins de lettres; & il faut remarquer que la premiére chose qu'il faut faire est de voir de combien de lettres la diction est composée, puis voir la quantiéme lettre est la premiére à main gauche, & par le nombre du rang qu'elle tient dans l'alphabet multiplier le nombre de la combinaison générale précédent celuy des lettres dont est composée la diction: par éxemple, si elle avoit huit lettres, & que la premiére lettre fust *G*, qui tient le septiéme lieu dans l'alphabet, il faudroit multiplier le nombre de la combinaison de sept choses, qui est celuy qui précéde huit, par sept, & puis continuer aux autres lettres. Si la diction avoit six lettres, & que la premiére fust un *U*, qui tient le dix-neuviéme lieu, il faudroit multiplier la combinaison de cinq choses par dix-neuf, & ainsi des autres: ou bien commencer par la premiére lettre à main droite, qui ne vaut que son nombre, & la séconde le vaut 22 fois.

Par ce moyen on pourroit écrire des lettres bien obscures, & qu'il seroit bien difficile de déchifrer, si l'on n'en sçavoit la méthode; sçavoir si on mettoit au lieu des mots le rang qu'ils tiennent dans le grand nombre: mais ce n'est pas assez de sçavoir écrire, si l'on ne sçait lire son écriture, & ce n'est pas peu de chose que de sçavoir lire celle-cy; car ceux mesmes qui l'auroient écrite ne la pourroient lire, s'ils n'en sçavoient la méthode, quoi-qu'ils sceussent celle de l'écrire.

Ayant donc un nombre donné, il faut prendre à la table des combinaisons le plus grand nombre qu'on pourra, qui néanmoins puisse servir de diviseur au nombre donné. La division faite il faut prendre ce qui est resté, & le diviser par la combinaison qui précéde, & le quotient montre la quantiéme lettre on doit prendre dans l'alphabet, de sorte qn'il ne faut pas que le quotient passe jamais 22, & il faut continuer à diviser jusques à ce que

l'on divise par 22, & cette derniére division faite, il faut voir ce qui reste & mettre la lettre qui convient à ce nombre pour la derniére. Il faut remarquer que si l'on ne pouvoit arriver à la division par 22, ou qu'icelle estant faite il ne restast rien, ou que l'on ne pust pas diviser par tous les nombres des combinaisons moindres que le premier qu'on a pris, & que le reste de la premiére division fust trop petit pour ce faire, le nombre que l'on auroit pris pour diviseur seroit trop grand, & il faudroit prendre celuy de devant, qui est moindre, & qui n'est que $\frac{1}{22}$ du premier, comme en ce nombre 234299, si on prenoit 234256 pour diviseur, le quotient seroit 1, & il ne resteroit plus que 43, que l'on ne pourroit diviser par les autres nombres; ainsi il faudroit prendre celuy de devant, qui est 10648, & cela arrive toûjours aux dictions qui commencent par un *z*, & à celles qui commencent par un *y* suivi d'un *z*. 2°. Il faut remarquer que la diction aura toûjours une lettre plus que le nombre des combinaisons qui servira de diviseur, comme en cét éxemple, où 10648 sert de diviseur, qui est le nombre de la combinaison de trois choses, il y aura quatre lettres; car ayant divisé 234299 par 10648, le quotient sera 21 qui vaut *y*, & il restera 10691 qu'il faudra diviser par 484, & le quotient sera 22, qui est un *z*, & il restera 43, qu'il faudra diviser par 22, le quotient est 1, qui est *a*, & le reste est 21 qui est *y*; de sorte que ledit nombre vaudra autant que *yzay*. 3°. Il est à remarquer qu'il faut diviser par tous les nombres moindres jusques à 22, & qu'il n'en faut passer aucun, & partant si le reste estoit moindre que le nombre par lequel on devroit diviser aprés, le quotient seroit trop grand, partant il le faudroit diminuer de l'unité. Si le quotient estoit 1, & que le reste fust trop petit, il faudroit changer de diviseur, comme en l'éxemple cy-dessous: par éxemple, en ce nombre 21600, je prens 10648 pour diviseur; le quotient est 2, & il reste 304 qui est moindre que 484, partant je prens 1 pour quotient, reste 10952, que je divise

divise par 484, le quotient est 22, & il reste 304 que je divise par 22, le quotient est 13, & il reste 18; de sorte que ce nombre sera *Azot*.

Si on vouloit voir quel rang tient une diction entre celles qui ont mesme nombre de lettres, comme une de trois lettres entre celles de trois lettres, dont il y en a 10648, il faudroit multiplier la premiére lettre à main gauche, sçavoir le rang qu'elle tient dans l'alphabet moins un par 484, qui sont les centaines; puis la séconde lettre aussi moins un par 22, & puis mettre le lieu de la derniére sans en rien oster, comme à ce mot *Asa* la premiére lettre vaut 1, & partant il la faut passer, parce qu'ostant un d'un, il ne reste rien; je viens à *s* qui est la dix-septiéme lettre dont j'oste 1, reste 16 que je multiplie par 22, & au produit j'ajouste 1 à cause de la derniére lettre qui est *a*, ce sera 353. Le rang de ce mot *Vaz* se trouve ainsi: *V* est la dix-neuviéme lettre, partant je multiplie 18 par 484, le produit est 8712; la séconde lettre est *a* qui vaut 1, dont ayant osté 1 il ne reste rien; je viens à *z* qui est la derniére lettre, & qui vaut 22 que j'ajouste à 8712, & je trouve que le rang de ce mot est le 8734 dans le nombre de 10648, & ainsi des autres qui ont plus de lettres; & remarquez que l'*a* au commencement ou au milieu d'une diction n'est conté pour rien, & qu'estant à la fin il vaut 1.

Ayant une nombre donné dire quelle diction tient ce rang dans le nombre total, pourveû qu'on dise de combien elle est de lettres.

Il faut ajouster au nombre donné le nombre des combinaisons des dictions composées de moins de lettres: par éxemple, on me donne 155 contenant le rang d'une diction de trois lettres, j'y ajouste les combinaisons des dictions d'une & de deux lettres, qui sont 484 & 22, la somme se montera à 661, & pour ce nombre j'opére comme si je voulois voir quelle diction tient ce rang dans le nombre total de toutes les dictions; je le divise par 484 le quotient est un, reste 177 que je divise par 22, le quotient est

8, reste 1, partant je prens la premiére lettre, puis la huitiéme, puis la premiére, pour avoir *aba*.

Autrement il faut diviser le nombre par le mesme diviseur que cy-dessus, & au quotient y adjouster 1, & faire ainsi à tous les quotiens: mais au reste qui se trouve aprés la division par 22, il ne faut rien ajouster: par exemple, on me donne 587, lequel je divise par 484, le quotient est 1, auquel j'ajouste 1, sont 2, reste 103, que je divise par 22; le quotient est 4 auquel j'ajouste 1, sont 5, & reste 15, partant je prens la deuxiéme lettre, la cinquiéme & la quinziéme, & je fais la diction *Beq*.

Si l'on me donnoit le mesme nombre, & que l'on me dist que ce fust un mot de deux lettres, je dirois qu'il seroit impossible, car il n'y a que 484 dictions de deux lettres: mais si on luy donnoit quatre lettres, il faudroit diviser de la mesme façon, & mettre un *a* devant, s'il avoit cinq lettres il faudroit mettre deux *a*, & ainsi des autres, comme en ce nombre 155 qui tient lieu d'une diction de trois lettres; je le devrois diviser par 484, mais à cause qu'il ne se peut, je mets un *a* comme si c'estoit un zéro, sinon qu'il se peut mettre le premier, & qu'estant le dernier il vaut 1; puis je prends l'autre diviseur 22, par lequel je divise 155, le quotient est 7, & il reste 1, j'ajouste l'unité à 7, parce que *a* n'a point de valeur s'il n'est à la fin, & que *b* vaut 1, *c* 2, *d* 3, &c. si ce n'est quand ils sont à la fin, de sorte que ce mot sera *Aba*: le premier *a* est à cause que le premier diviseur s'est trouvé plus grand que le nombre à diviser; *b* à cause de 7 lequel vaut 8 par l'addition de l'unité, & *b* est la huitiéme lettre, & le dernier *a* à cause de 1 qui reste.

Quand une division manque quelque part au commencement, au milieu, ou à la fin, il faut toûjours mettre un *a*, comme en ce nombre 500, qui tient lieu d'une diction de trois lettres. Je le divise par 484, il vient 1, qui est un *b*, & il reste 16, & partant je ne puis diviser par 22, de sorte qu'aprés le *b* il faut mettre un *a*, & puis la seiziéme lettre qui est *r*, & le mot sera *Bar*. Il faut

faut noter icy que l'*a* ne vaut aucun nombre, sinon à la fin qu'il vaut 1, & toutes les autres aussi valent leur nombre quand elles sont les derniéres, mais estant au commencement ou au milieu elles vallent 1 moins que le rang où elles sont dans l'alphabet, comme qui commenceroit à conter par *b*, *c*, *d*, 1, 2, 3, &c. & ainsi *z* ne vaut que 21, mais à la fin il vaut 22.

Il faut encore remarquer que comme en faisant les opérations d'une division quand le diviseur est plus grand que le nombre qui luy est au dessus, on met un zéro ou deux, & on avance le diviseur d'une ou de deux places: aussi dans l'opération de toutes ces divisions-cy, si le diviseur se trouve plus grand que le dividende, il faut mettre un *a*, & mettre le diviseur d'aprés, lequel, s'il est trop grand, il faut encore mettre un *a*, & changer de diviseur, jusques à ce qu'il se trouve plus petit comme en ce nombre 5157999, qui tient rang d'une diction de six lettres, il le faut diviser par 5153632, qui tient lieu de centaine de mille, le quotient est 1 qui est *B*, & il reste 4367, qu'on ne peut diviser par le diviseur suivant 234256, & partant je mets un *a*; ni par celuy d'aprés aussi qui est 10648, & je mets encore un *a*, puis je le divise par 484, le quotient est 9 qui est *l*, & il reste 11 que je ne puis diviser par 22, & partant je mets un *a*, & le reste est 11, qui estant le dernier est *m*, ce mot donc sera *Baalam*; pour faire *Balaam* il faudroit 5249475.

On pourroit écrire par ce moyen des lettres bien obscures, mais il faudroit mettre devant & aprés chaque nombre un point, & puis un chiffre, qui marqueroit de combien de lettres la diction seroit composée, & on pourroit se servir des deux sortes tout ensemble. L'on peut écrire des airs par le mesme moyen, de la mesme façon que des dictions, en nommant les notes *a*, *b*, *c*, au lieu de *ut*, *re*, *mi*, mais il faudroit écrire les temps à part comme les notes.

Ha-

Hazars.

C'EST la couſtume à Genes d'élire, ou plûtoſt de tirer au ſort tous les ans d'entre les cent Sénateurs cinq perſonnes qui doivent avoir les principales Charges de la République.

Cela a donné lieu à des paris qui ſe font tous les ans touchant ceux à qui le ſort arrivera. Il ſe trouve des Banquiers qui prometront juſques à vingt mille piſtoles pour une qu'on leur donnera ſi le ſort tombe ſur 5 qu'on aura nommez; 5 ou 6 mille, s'il n'y a que 4 des 5 qu'on aura nommez; & 5 ou 6 cens, s'il y en a 3. Pour l'ordinaire ils ne donnent rien pour un ni pour deux. On demande quels ſont les hazars pour le Banquier & pour le Pariant, & quel profit le Banquier peut faire ſur ce commerce.

Il faut premiérement arreſter ce que doit donner le Banquier, ſi le ſort tombe ſur ceux qu'on aura nommez, ou ſur quelques-uns d'eux.

Suppoſons que le Banquier donne 20000 piſtoles pour une, ſi le ſort tombe ſur les 5 qu'on aura nommez; 5000 s'il n'y en a que 4; 300 s'il y en a 3; & 4 s'il n'y en a que 2.

On verra premiérement en combien de maniéres les 5 qu'on doit tirer au ſort peuvent venir.

Il faut multiplier 100 par 99, le produit par 98, par 97, & par 96; mais parce que le produit de ces 5 nombres contient auſſi l'ordre dans lequel ces 5 perſonnes ſont tirées, il le faut diviſer par 120, qui eſt la combinaiſon de cinq choſes; ou bien multiplier ſeulement 80 par 97, 98 & 99, ce qui eſt la meſme choſe que de multiplier les cinq nombres l'un par l'autre, & diviſer le produit par 120. On aura 75287520, qui ſont toutes les façons dont cinq billets peuvent eſtre tirez ou pris dans 100.

Il faut maintenant voir quels ſont les hazars du Pariant.

Les cinq qu'il a nommez ne peuvent arriver qu'en une ſeule maniére: il n'y aura donc qu'un hazar pour luy, & 75287519 pour le Banquier; & parce que le Banquier donne 20000 pour 1, il

il faut multiplier 1 par 20000; donc pour 20000 de hazar qu'a le Pariant, le Banquier en a 75287519, qui estant divisez par 20000 donnent $3764\frac{3}{4}$, la proportion des hazars est donc comme 1 à $3764\frac{3}{4}$.

Pour avoir les hazars de 4, il faut prendre cinq fois 95, qui sont 475, qu'il faut oster de tous les hazars, ou plûtost de ceux qu'a le Banquier sur les hazars de 5. On ostera donc 475 de 75287519, il restera 75287044 pour les hazars du Banquier: mais parce qu'il donne 5000 pour un, il faut diviser 75287044 par 5000, & on aura $15057\frac{2}{5}$ peu plus pour les hazars du Banquier, & 475 pour ceux du Pariant; & divisant l'un par l'autre, il viendra $31\frac{7}{10}$ peu moins, pour les hazars du Banquier, & un pour ceux du Pariant.

Pour avoir les hazars de trois personnes dans les cinq qu'on a nommées, on multipliera par 10 le triangle de 94, qui est 4465; on aura donc 44650 pour les hazars du Pariant, qui estant ostez des hazars que le Banquier a eû sur quatre, sçavoir de 75287044, il restera 75242394 pour les hazars du Banquier, qu'il faut diviser par 300, parce qu'il donne 300 pour 1, & on aura 250808 peu moins pour les hazars du Banquier, qui estant divisez par 44650, on aura la proportion des hazars du Banquier & du Pariant, comme $5\frac{5}{8}$ peu plus à 1.

Reste à voir les hazars de 2. Pour avoir ceux du Pariant, on multiplîera le tétraédre de 93, sçavoir 138415 par 10, & on aura 1384150, qu'il faut oster des hazars que le Banquier a eû sur 3, sçavoir de 75242394, il restera 73858244, qu'il faut diviser par 4, à cause que le Banquier donne 4 pour 1, & on aura 18464561 pour les hazars du Banquier; & les divisant par les hazars du Pariant, qui sont 1384150, on trouvéra que le hazars du Banquier & du Pariant sont entre eux comme $13\frac{1}{3}$ peu moins à 1.

On peut aussi considérer les hazars de 1, c'est à dire s'il venoit quelqu'un des cinq qu'on a nommé. Il faudra multiplier par 5 le triangle-triangle ou quatriéme puissance triangulaire de 92, qui est 3183545, le produit est 15917725, qu'il faut oster des

hazars du Banquier sur 2, sçavoir de 73858244, il restera 57940519, qui sont les hazars du Banquier : mais parce qu'il ne donne rien, quand il ne vient qu'un des cinq qu'on a nommez, on divisera 57940519 par 15917725, & le Banquier aura encore $3\frac{16}{25}$ de hazard sur 1 qu'aura le Pariant ; mais ce hazard n'est qu'au profit du Banquier, & le Pariant n'y a rien.

Ayant tous ces hazars, il les faut assembler. Et premierement si le sort tombe sur les cinq qui ont esté nommez, le Pariant a 20000. S'il en vient quatre, il y a 475 hazars pour le Pariant, qui estant multipliez par 5000 que le Banquier doit donner, s'il arrive quelqu'un des 475 hazars, ce sera 2375000 hazars pour le Pariant.

Si le sort tombe sur trois de ceux qui ont esté nommez, les hazars de trois sont 44650, qui multipliez par 300, que le Banquier doit donner pour chacun de ces hazars, ce sera 13395000 hazars pour le Pariant, s'il en vient trois des cinq qu'il a nommé.

Si le sort ne tombe que sur deux, on a trouvé que les hazars de deux sont 1384150, qui multipliez par quatre donnent 5536600 hazars pour le Pariant. Tous ces hazars ensemble montent à 21326600 ; & ce sont les hazars du Pariant.

Hazars	
20000	de 5
2375000	de 4
13395000	de 3
5536600	de 2
21326600	Somme des hazars du Pariant.

Pour avoir les hazars du Banquier, il faut assembler tous les hazars du Pariant, qui sont 1, 475, 44650 & 1384150, la somme est 1429276, qui ostée de tous les hazars qui sont en tout 75287520, il restera 73858244 pour les hazars du Banquier ; les hazars du Pariant seront donc à ceux du Banquier comme 21326600 à 73858244, ou dans les moindres termes, comme

Hazars	
1384150	de 2
44650	de 3
475	de 4
1	de 5
1429276	Somme des hazars du Banquier.

183850

1838,0 à 636709, qui est comme 1 à un peu moins de $3\frac{1}{2}$, ou justement comme 1 à $3\frac{85159}{183850}$.

Ce seroient là les hazars du Banquier & du Pariant, si le Banquier ne recevoit rien de ceux à qui le sort est favorable : mais parce qu'outre l'avantage qu'il a dans les hazars, il a encore une pistole de chacun de ceux à qui les hazars peuvent arriver, il a pour luy tous les hazars de cinq personnes choisies dans 100, sçavoir 75287520 : la proportion des hazars du Pariant est donc à ceux du Banquier, comme 21326660 à 75287520, ou comme 5331665 à 18821888, c'est à dire comme 1 à un peu plus de $3\frac{1}{2}$.

Mais parce que d'ordinaire on ne donne rien pour 2, il faut oster les hazars de 2, qui se montent à 5536600, des hazars du Pariant, le reste sera 15790000, qui sont aux hazars du Banquier, comme 394750 à 1882188, ou comme 1 à un peu plus de 4 $\frac{3}{4}$.

Voicy le fondement & les raisons de cette opération.

Premiérement pour sçavoir en combien de maniéres on peut choisir cinq choses dans 100, on multiplie l'un par l'autre les cinq nombres 100, 99, 98, 97, & 96, & on divise le dernier produit par l'ordre de cinq choses.

Si on ne prenoit qu'une chose dans 100, il est certain qu'on ne le pourroit faire qu'en 100 façons. Que si on en prend deux, puis que la premiére se prend en 100 façons, aprés chacune des 100 on peut mettre laquelle on voudra des 99 restantes ; mais on voit icy que l'ordre y est compris, parce que chacune des 100 sera dans tous les choix la premiére & la derniére ; il faudra donc diviser par deux, sçavoir par l'ordre de deux choses, le produit de 99 par 100.

Si on choisit trois choses dans 100, parce que deux choses se prennent en 9900 maniéres, qui est le produit de 100 par 99, & qu'il en reste 98, on pourra choisir chacune de ces 98 qui restent, & l'ajouster à chacune de 9900 façons dont on a choisi

deux choses: le produit de 9900 par 98 contiendra les diverses maniéres de choisir trois choses dans 100, l'ordre compris.

Par la mesme raison pour choisir quatre choses, il faudra multiplier ce dernier produit, qui est 970200, par 97 qui restent; & pour cinq choses multiplier encore ce dernier produit, qui est 94109400, par 96, & diviser le produit 9034502400 par 120, qui est l'ordre de cinq choses, parce que par cette construction chacune des 100 choses tient alternativement chacun des cinq rangs qui sont dans cinq choses, sçavoir le premier, le deuxiéme, troisiéme, quatriéme & dernier.

Pour les hazars du Pariant on multiplie 95 par 5, pour sçavoir en combien de façons il peut venir quatre des cinq qu'il a nommez; car puis qu'ils en manque un, chacun des cinq peut manquer, & en sa place il peut venir l'un des 95, dont il n'a nommé aucun: il faut donc multiplier 95 par 5. Il est vray que les quatre estant ostez de 100, il resteroit 96: on ne multiplie pas pourtant par 96, parce que le cinquiéme des nommez se trouvant au nombre des hazars du Pariant, il seroit compté deux fois au Pariant.

S'il vient trois des cinq qui ont esté nommez, les hazars se trouvent en multipliant par 10 le triangle de 94.

On multiplie par 10, parce que trois choses se peuvent choisir dans cinq en dix maniéres, ainsi qu'il a esté expliqué cy-devant, quand on a fait voir en combien de façons on peut choisir cinq choses dans 100, car on multipliera 5, 4, 3, l'un par l'autre, & on divisera le produit 60 par l'ordre de 3, qui est 6.

On multiplie par le triangle de 94, parce que dans les cinq qu'on tire au hazar, n'y en ayant que trois des cinq que le Pariant a nommez, les deux autres doivent estre des 95 autres. Or dans tous les choix ou hazars, le premier de ces 95 se trouvéra avec chacun des 94 autres. Aprés le sécond de ces mesmes 95 se trouvéra avec chacun des 93 autres. Le troisiéme avec chacun des 92; & ainsi de suite jusqu'au 94 qui se trouvéra avec le dernier des 95: or ces nombres assemblez font le triangle de 94, parce qu'il

qu'il faudroit ajouster 94 avec 93, 92, 91, &c. jusqu'à 1.

Par le mesme raisonnement on verra pourquoy pour avoir les hazars de deux, on multiplie par 10 le tétraédre de 93.

Question.

On demande à combien de personnes se montent les ancestres en trente générations, supposant que les mariages ne se soient point faits entre les descendans des premiéres & plus anciennes générations. Il faut prendre la trentiéme puissance de deux, qui est 1073741824, & c'est le nombre des ancestres.

Question.

Au jeu des Eschecs, les huit pions peuvent avancer une ou deux cases au premier coup. On demande en combien de façons on peut joüer ces huit pions, en ne joüant chacun d'eux qu'une seule fois.

S'ils ne pouvoient estre joüez que d'une seule maniére, on auroit 40320 façons de les joüer, sçavoir selon la combinaison de l'ordre de huit choses: mais parce que chacun se peut joüer en deux maniéres, il faudra multiplier 40320 par la huitiéme puissance de deux, sçavoir par 256, & on aura 10321920.

En cette sorte de combinaison où chaque chose se place en deux maniéres, il faut multiplier tous les nombres pairs l'un par l'autre, au lieu qu'en la combinaison simple on ne multiplie que tous ces nombres. Ainsi une chose se prend en deux façons, 2 en 8, 3 en 48, 4 en 384, &c.

2	2	1
4	8	2
6	48	3
8	384	4
10	3840	5
12	46080	6
14	645120	7
16	10321920	8

Si chaque chose se prenoit en trois maniéres, comme si les pi-

ons pouvoient avancer une, deux ou trois cases, il faudroit multiplier l'un par l'autre les nombres multiples de 3, sçavoir 3, 6, 9, 12, &c. & on auroit 18 pour le changement de deux choses, 162 pour celuy de trois, &c. & ainsi les huit pions se joüëroient la premiére fois en 264539520 maniéres.

3	3	1
6	18	2
9	162	3
12	1944	4
15	29160	5
18	524880	6
21	11022480	7
24	264539520	8

FIN.

DES QUARREZ OU TABLES MAGIQUES.

Par M. FRENICLE.

DES QUARREZ OU TABLES MAGIQUES.

On appelle quarré magique celuy qui estant divisé par cellules en quantité répréſentée par un nombre quarré; & les cellules eſtant remplies de nombres conſécutifs, ou qui ſoient en même progreſſion arithmétique, contient pareille ſomme en chacune de ſes lignes, de quelque façon qu'on les puiſſe prendre. Exemple:

Le quarré A, B, C, D, 16, eſt diviſé en 16 cellules, & ces cellules ſont remplies des nombres conſécutifs, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, &c. juſques à 16: & ces nombres ſont diſpoſez d'un tel ordre dans les cellules, que les nombres de chaque ligne eſtant aſſemblez, font une ſomme égale; ſoit qu'on prenne les lignes en long, comme 1, 15, 14, 4, | 12, 6, 7, 9, | 8 10, 11, 5, | & 13, 3, 2, 16, | ou qu'on les prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13, | 15, 6, 10, 3, | 14, 7, 11, 2, | 4, 9, 5, 16, | ou enfin ſi on conſidére les deux diagonales ou lignes tranſverſales, 1, 6, 11, 16, & 4, 7, 10, 13, & la ſomme de chacune de ces lignes eſt 34.

A			B

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

C D

La ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne ne ſe peut pas prendre à diſcretion; mais elle eſt néceſſaire à chaque figure: & voicy le moyen de ſçavoir quelle elle eſt.

La somme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique estant multipliée par la moitié du costé du quarré, donne la somme de chaque ligne. Ainsi au quarré qui a 16 cellules, si le moindre nombre est 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur somme 17 par 2, qui est la moitié de 4, costé de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que si le quarré magique est impair, on multipliera la moitié de la somme des deux nombres extrêmes par le costé du quarré. Ainsi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, si le moindre des nombres est 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65; qui se trouve adjoustant les termes extrêmes 25 & 1; & prenant la moitié de 26, qui est leur somme, & on aura 13, qui estant multiplié par 5, costé du quarré 25, donnera 65.

Si les nombres dont on se sert pour remplir les cellules ne commençoient pas par l'unité, ou qu'ils eussent autre différence entr'eux que l'unité; on ne laisseroit pas de se servir des régles cy-dessus pour trouver la somme des nombres de chaque ligne. Exemple: Que les nombres dont on veut remplir les cellules du quarré de 4, qui est 16, soient 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33. J'assemble les extrêmes 3, & 33, pour avoir 36. qui multiplié par 2, moitié de 4, costé du quarré 16, donnera 72 pour la somme des nombres de chaque ligne.

Si les extrêmes des nombres qu'on employe au quarré 16, estoient 1, & 31, je prendrois de même la somme qui est 32; qui estant multipliée par le même 2, donneroit 64 pour la somme des nombres de chaque ligne.

De même si pour remplir les cellules du quarré 9, qui a 3 de costé, on se servoit de 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, je prendrois la somme des extrêmes 4 & 28, qui est 32, (laquelle somme est toûjours un nombre pair, lors qu'il s'agit des quarrez impairs) la moitié de 32 est 16, qui multiplié par le costé 3, donne 48 pour la somme des nombres qui sont en chaque ligne.

Il faut maintenant voir la maniére dont on se sert pour disposer les

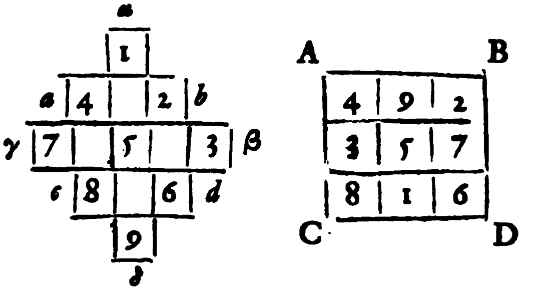
les nombres en telle ſorte que chaque ligne faſſe une ſomme égale.

Il y a entre autres deux méthodes qui ſervent à cet effet. L'une eſt pour les ſeuls impairs, & l'autre peut ſervir tant aux quarrez pairs qu'aux impairs.

On donnera icy premiérement celle qui appartient aux ſeuls impairs, puis on parlera de la générale.

Auſquelles méthodes on ſuppoſera toûjours pour plus grande facilité, que les nombres dont les cellulles doivent eſtre remplies commencent par l'unité, & qu'elles s'entreſuivent avec la différence de la même unité, comme ſont 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Car en ce qui dépend de placer & ranger les nombres dans les cellules, il n'importe pas quel ſoit le moindre nombre, ni quelle différence ils ayent entre eux. Il ſuffit qu'ils ſoient en progreſſion arithmétique, & qu'ils ſe ſurmontent l'un l'autre d'un excés toûjours égal, comme 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c. ou 4, 9, 14, 19, 24, 29, &c.

Pour remplir les cellules d'un quarré impair, par éxemple du quarré ABCD qui a 9 cellules, je décris un autre quarre *abcd* qui a pareillement 9 cellules, comme on voit icy : & ſur chacune des faces du quarré, j'étens une autre cellule vis-à-vis de la cellule qui eſt au milieu de chaque coſté : leſquelles cellules ſont marquées $\alpha\beta\gamma\delta$.



Cela fait, j'écris les nombres de ſuite, commençant par une des cellules qui ſont hors du quarré & par la plus éloignée du milieu.

On écrira donc 1, 2, 3, dans les cellules α, *b*, β, puis revenant à la cellule *a*, tirant vers *d*, on écrira 4, 5, 6, & enfin aux cellules, γ, *c*, δ, on mettra 7, 8, 9.

Ces nombres eſtant ainſi diſpoſez, je conſidére ceux qui ſe rencontrent dans le quarré *a*, *b*, *c*, *d*, qui ſont 4, 2, 5, 8, 6, leſquels je mets aux

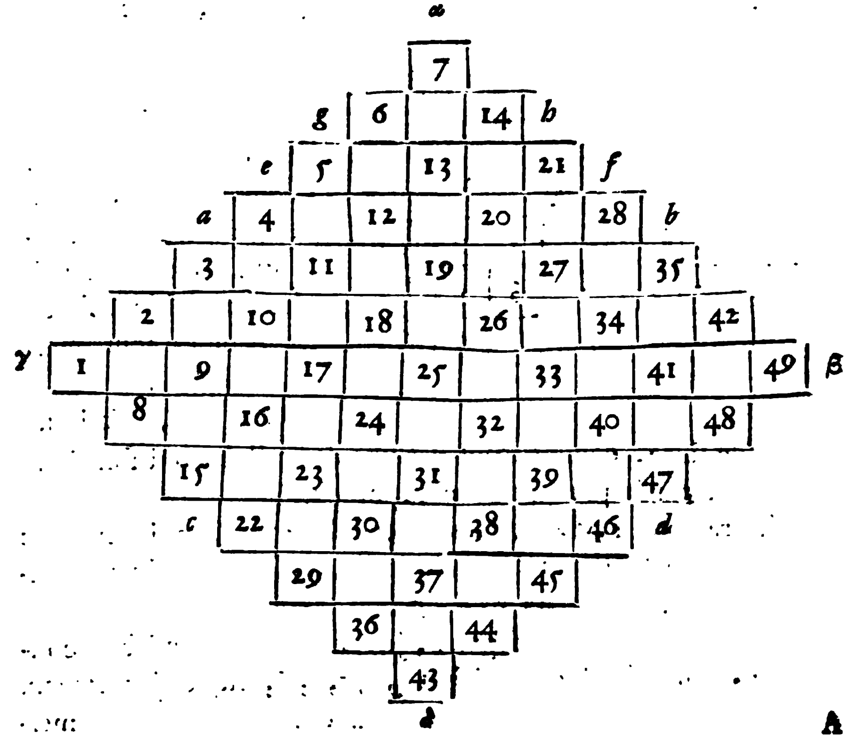
 meſ-

mesmes places dans le quarré ABCD, appresté pour cét effet.

Il reste donc à remplir les autres places vuides du quarré, ce qui se fera mettant le nombre qui est en δ, en la cellule qui est au dessous de α, sçavoir entre 4, & 2; & en échange, le nombre qui est en α, en celle qui est au dessus de δ, entre 8, & 6.

Et semblablement on mettra 7, qui est en γ, vers β, entre 2, & 6, & 3, qui est en β: on le mettra prés de γ, entre 4, & 8; comme on peut voir en la figure. On aura donc la figure complette ABCD qui a 15, pour la somme des nombres de chacune de ses lignes, & diagonales.

Mais parce que le quarré de 3, pour estre trop petit ne donnera pas peut-estre une entiére connoissance de la façon dont on fabrique ces quarrez impairs, on en apportera un plus grand pour l'éxemple, sçavoir celuy de 49, qui a 7 de costé.



A B

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

C D

A B

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

C D

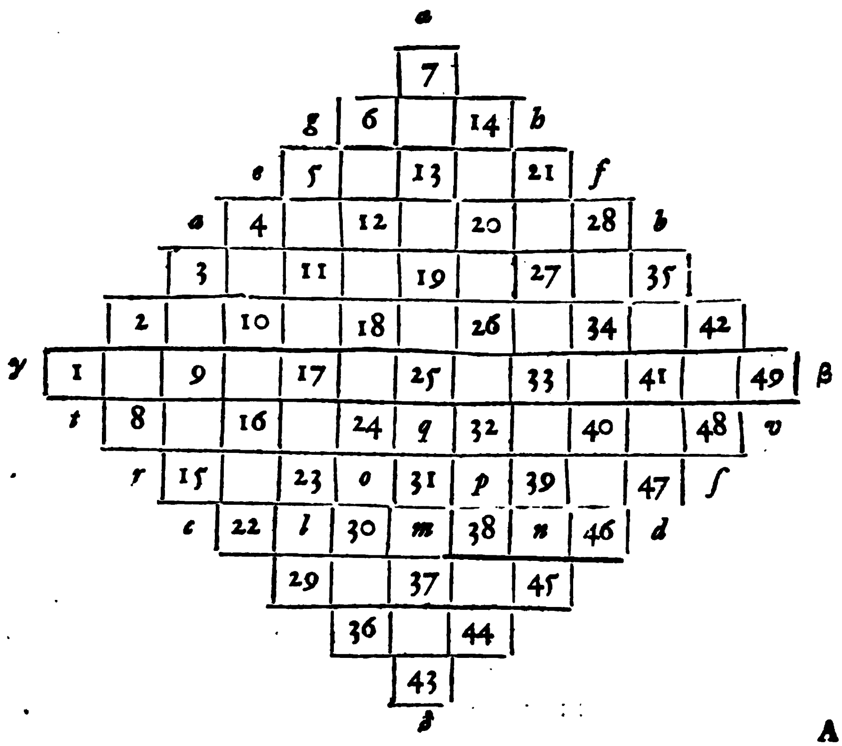
Ayant fait le quarré *abcd*, qui a ſept cellules à chacun de ſes coſtez, j'élève ſur le coſté *ab*, les cinq cellules *ef*, ſçavoir deux moins que celles du quarré; puis ſur ces cinq je mets les trois marquées *gh*; puis ſur ces trois j'en poſe une marquée *α*: car leur nombre doit toûjours diminuer de deux.

Semblablement ſur chacun des autres coſtez, comme ſur *ac*, ſur *cd*, & ſur *db*, je place cinq cellules, puis trois & une. J'écris aprés les nombres de ſuite dans ces cellules, commençant par laquelle on voudra des quatre, qui ſont comme la pointe, & qui ſont les plus éloignées du quarré *abcd*, comme par *γ*; & de là tournant vers quelque coſté qu'on voudra, ainſi qu'on voit en cette figure, (car il n'importe point par où on commence) en laquelle les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, vont de *γ* vers *α*. Puis on revient à la cellule extérieure voiſine de *γ*, & tirant vers le meſme coſté, on écrit les nombres ſuivants 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & les autres nombres enſuite, comme la figure le pourra mieux répréſenter que le diſcours.

Les nombres eſtant ainſi placez, je conſidére ceux qui ſe rencontrent dans les cellules du quarré *abcd*, & les écris

en la mesme disposition & situation dans les cellules du quarré ABCD, appresté pour cet effet, ainsi qu'on peut voir icy.

Cela fait, on remplira les places vuides avec les nombres des cellules qui sont hors du quarré *abcd*, en prenant tout ce qui est dehors, sçavoir *e*, *g*, *α*, *b*, *f*, dans lesquelles cellules sont les nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7; & le plaçant, ainsi disposez & tournez comme ils sont, sur le costé opposé *cd*, sçavoir les trois cellules de la ligne *ef*, où sont les nombres 5, 13, 21, sur les trois cellules vuides du costé *cd*, marquées *l*, *m*, *n*,



A

Puis on mettra les deux cellules de *g*, *b*, où sont 6, 14, sur les deux vuides de *r*, *ſ*, marquées *o*, *p*, &c. A

A B

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

C D

A B

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	17	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

C D

Enfin on mettra 7, qui eſt en la cellule *a*, en la cellule vuide, qui eſt au milieu de *tv*, marquée *q*, & ainſi les ſix nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7, ſe trouveront dans le quarré en la meſme diſpoſition, & tournez du meſme coſté, qu'ils eſtoient hors du quarré. Les autres coſtez ſe rempliront de la meſme ſorte; car on mettra les ſix nombres qui ſont hors du quarré aux cellules *b*, *β*, *d*, ſur le coſté oppoſé *ac*, & ſur les deux coſtez prochains, tirant vers *β*, en ſorte que 49, qui eſt en *β*, ſoit plus prés du *β* que tous les autres, quand il ſera placé.

De meſme les nombres de *d*, *δ*, *c*, ſeront placez du coſté de *ab*, tournans leur pointe en bas vers *δ*, comme ils ſont hors du quarré; & pareillement les nombres de *a*, *γ*, *c*, ſeront placez en la meſme façon ſur *b*, *β*, *d*, & on aura le quarré magique parfait, ainſi qu'on peut voir icy.

On pourra uſer d'un autre moyen ſi on a peur de ſe méprendre, en voulant remplir les cellules vuides du quarré avec celles qui ſont hors du quarré, qui ſera comme s'enſuit.

Depuis chaque cellule remplie qui eſt hors du quarré, on comptera en tirant vers le quarré autant de cellules tant pleines que

vui-

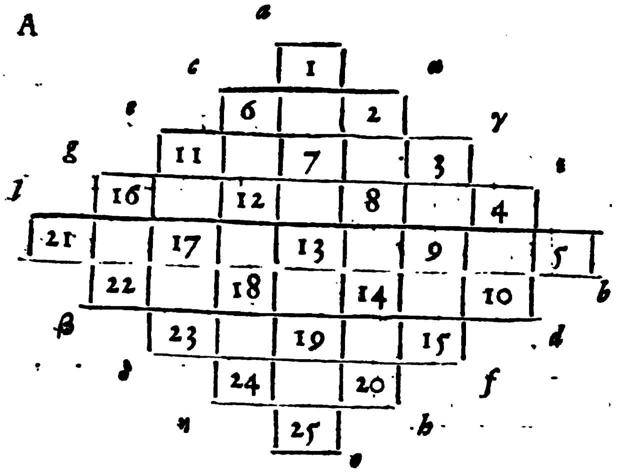
vuides, que le quarré a de cellules à chaque costé, sçavoir 7 au quarré que nous avons pris pour exemple : ainsi comptant sept cellules depuis *e* où 5 est écrit, sans l'y comprendre, on rencontrera la cellule marquée *l*: & comptant de mesme sept cellules depuis celle où est le nombre 13, on rencontrera *m*, & comptant depuis *f*, on trouvéra *n*. Il faudra donc remplir les trois cellules *l*, *m*, *n*, des nombres 5, 13, 21. Par la mesme raison le nombre de la cellule *g* viendra en *o*, & celuy de *h* en *p*, & enfin celuy de *a* en *q*.

Les autres costez se feront de mesme, car depuis chacune des cellules remplies de la figure *bβd*, qui sont hors du quarré, comptant sept cellules vers le quarré, & le costé *ac*, opposé au costé *bd*, on trouvéra une cellule vuide, qu'on remplira du nombre qui est dans la cellule depuis laquelle on a compté 7, & on fera le mesme des cellules qui sont aux deux autres costez du quarré.

Variation des quarrez impairs, & particuliérement du quarré qui a 5 de costé.

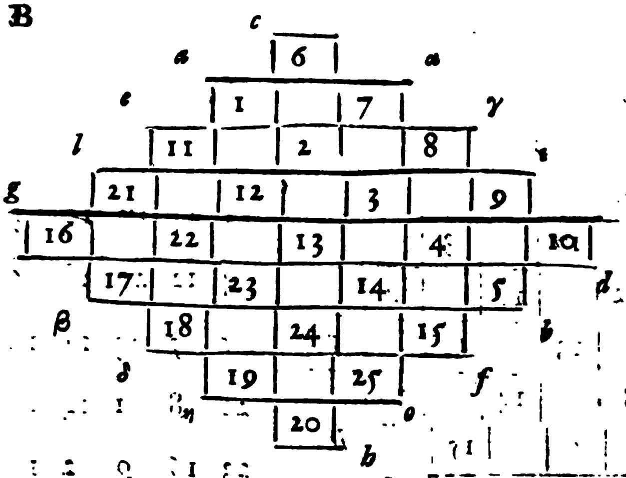
Les Tables des quarrez impairs se peuvent varier en diverses maniéres selon qu'on disposera les rangs des nombres. Par exemple en la figure de 5, au lieu de ranger les nombres, ainsi qu'on peut voir en A, on les pourra aussi ranger comme on voit en B, & en C, & les autres, desquels on peut voir les quarrez achevez, qui sont placez à costé.

A



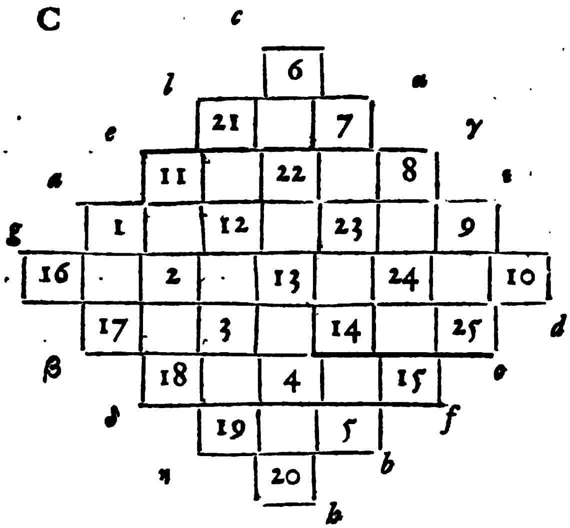
11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

B



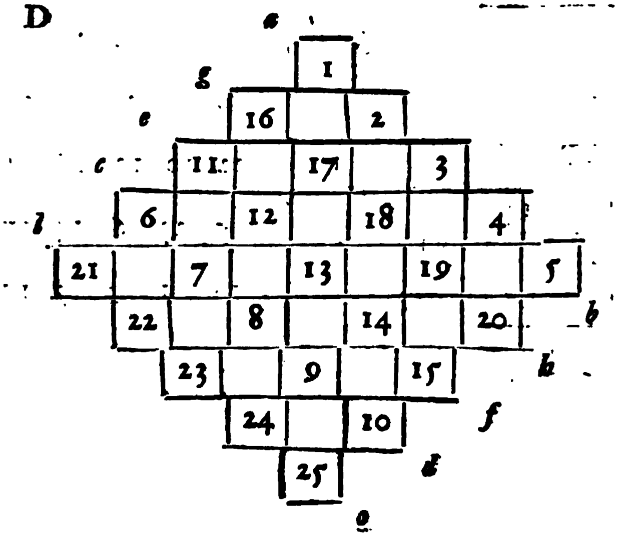
11	19	2	25	8
9	12	20	3	21
22	10	13	16	4
5	23	6	14	17
18	1	24	7	15

C



11	19	22	5	8
9	12	20	23	1
2	10	13	16	24
25	3	6	14	17
18	21	4	7	15

D



11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

Le

Le changement de ces figures est facile à comprendre par l'inspection de celles qui sont icy répréséntées, ausquelles on voit qu'on peut transporter les lignes des nombres ainsi qu'on veut, pourvû qu'on change en mesme sorte la ligne correspondante ou rélative. Or les lignes rélatives sont celles qui sont également éloignées de celles du milieu; ainsi la rélative de *ab*, en la figure A, est *lo*, & celle de *cd*, est *gh*: de mesme celle de *al*, est *bo*, & celle de *α β*, est *ε η*.

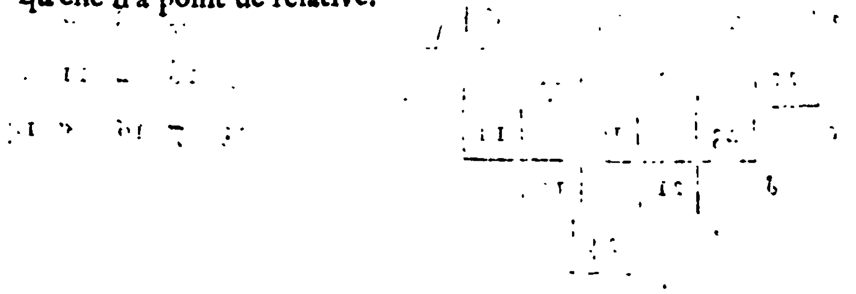
Par exemple, la ligne correspondante de *ab*, est *lo*: & la correspondante de *cd*, est *gh*. Mais *ef* n'a point de correspondante, & ainsi elle ne peut estre ostée de sa place.

On voit en la figure B, que la ligne *cd* tient le premier lieu, & par conséquent sa rélative *gh* sera au dernier lieu; & *ab* estant au second lieu, sa rélative *lo* sera au quatriéme.

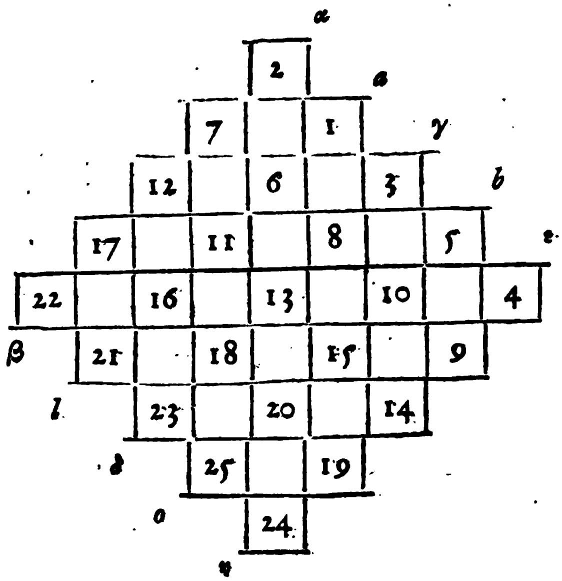
En C, on a transposé la derniére ligne de A, sçavoir *lo*, & on l'a mise au sécond lieu, & sa rélative *ab* au quatriéme lieu; le reste demeurant comme en B.

En D on a placé *gh* au sécond lieu, & sa rélative *cd* au quatriéme, le reste demeurant comme en A.

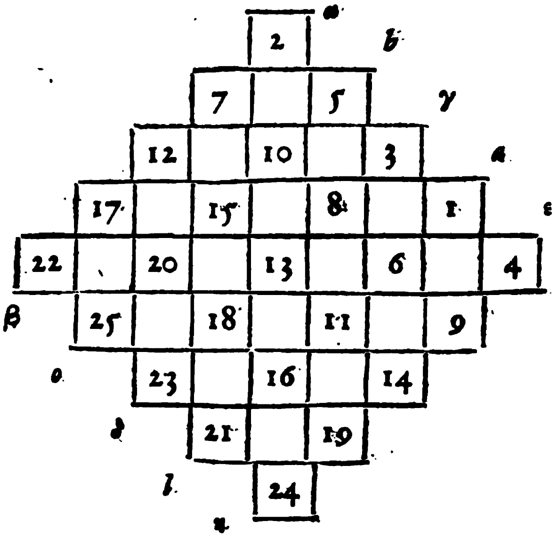
On pourra ensuite transporter les lignes *αβ*, *εη*, *al*, *bo*; & ainsi on auroit les figures suivantes par la transposition des lignes de la figure A; ausquelles transpositions on voit comme cy-devant, que la ligne *γδ*, qui est au milieu, ne se change point, parce qu'elle n'a point de rélative.



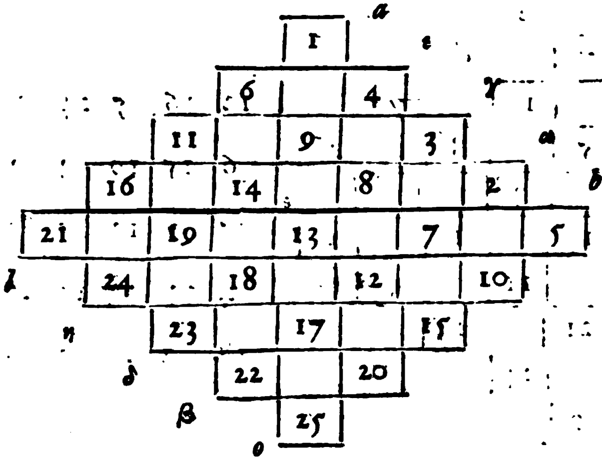
1 2



12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

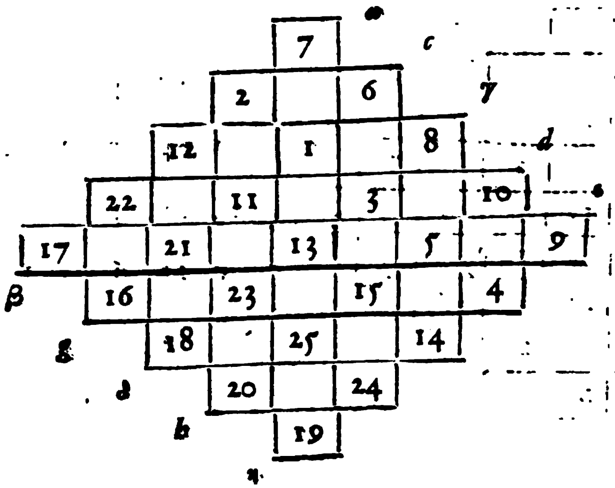


12	21	10	19	3
1	15	24	8	17
20	4	13	22	6
9	18	2	11	25
23	7	16	5	14

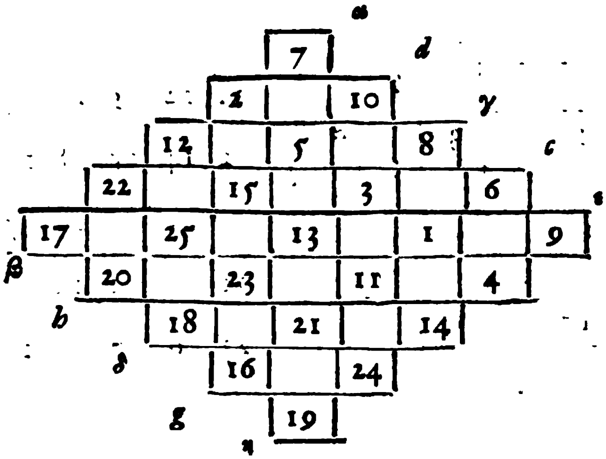


11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

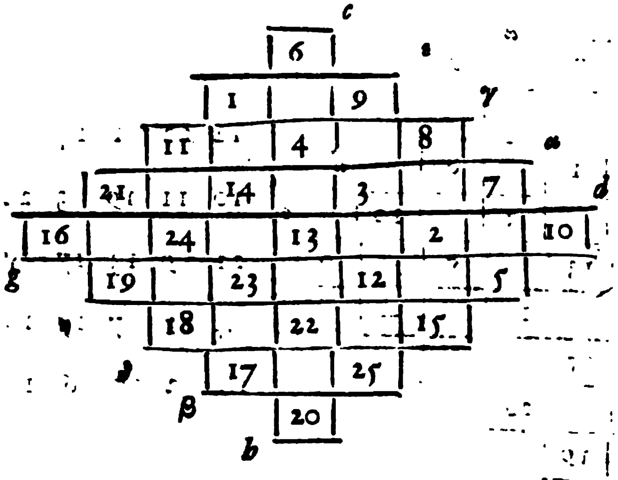
S'enſuivent les tranſpoſitions des lignes *c g*, *a β*, &c. de la figure B. page 217.



12	20	1	24	8
10	11	19	3	22
21	9	13	17	5
4	23	7	15	16
18	2	25	6	14



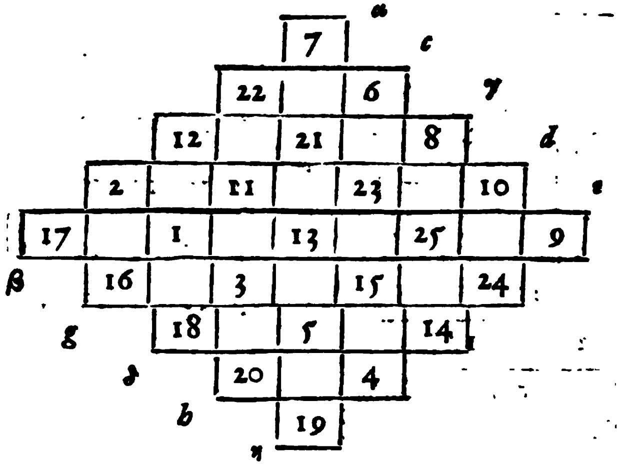
12	16	5	24	8
6	15	19	3	22
25	9	13	17	1
4	23	7	11	20
18	2	21	10	14



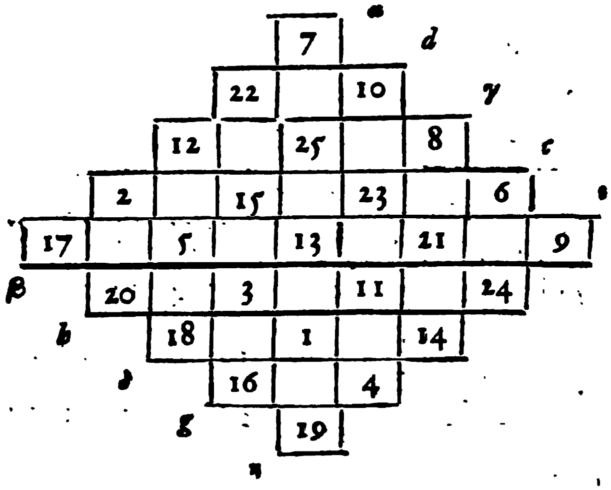
11	17	4	25	8
7	14	20	3	21
24	10	13	16	2
5	23	6	12	19
18	1	22	9	15

Voi-

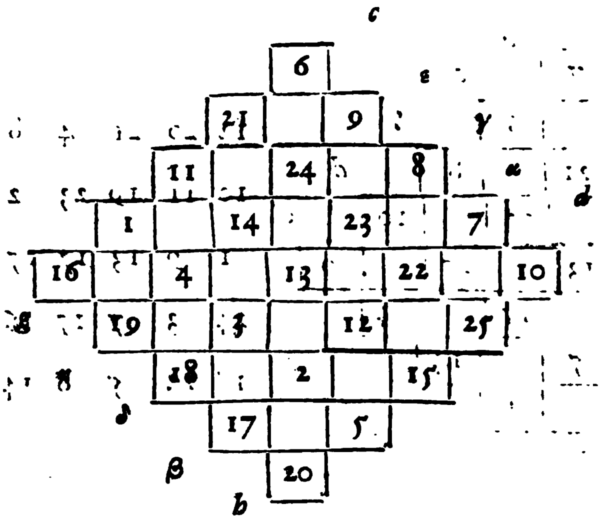
Voicy enſuite les tranſpoſitions de la figure C, page 218.



12	20	21	4	8
10	11	19	23	2
1	9	13	17	25
24	3	7	15	16
18	22	5	6	14

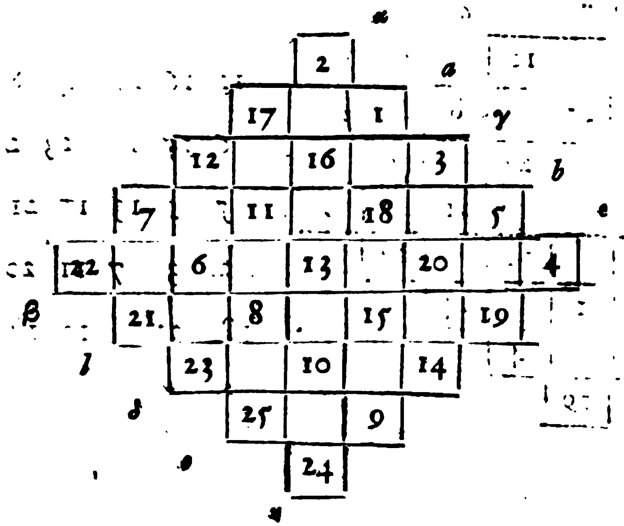


12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14



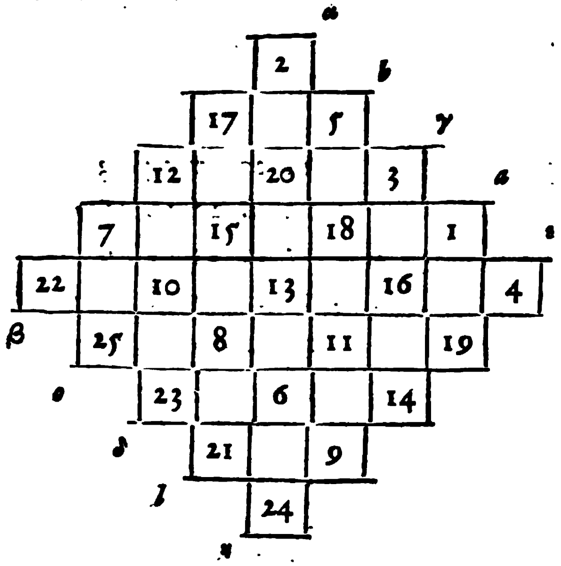
11	17	24	5	8
7	14	20	23	1
4	10	13	16	22
25	3	6	12	19
18	21	2	9	15

Enfin voicy les changemens de la figure D, page 218.

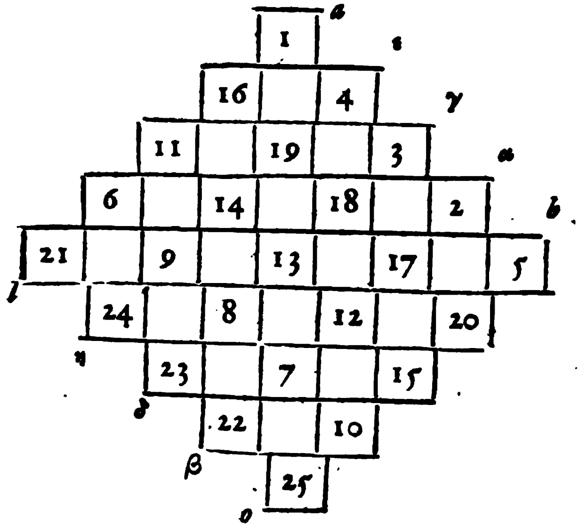


12	25	16	9	3
5	11	24	18	7
9	4	13	22	20
19	8	2	15	21
23	17	10	1	14

2



12	21	20	9	3
1	15	24	18	7
10	4	13	22	16
19	8	2	11	25
23	17	6	5	14



11	22	19	10	3
2	14	25	18	6
9	5	13	21	17
20	8	1	12	24
23	16	7	4	15

On peut encore varier ces tables d'une autre maniére ; par exemple la premiére table de 5, qui est

A

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	
	11	24	7	20	3	
α	4	12	25	8	16	*β*
γ	17	5	13	21	9	*δ*
ε	10	18	1	14	22	*η*
	23	6	19	2	15	
	f	*g*	*h*	*l*	*p*	

B

	11	20	7	24	3	
α	4	8	25	12	16	*β*
	17	21	13	5	9	
ε	10	14	1	18	22	*η*
	23	2	19	6	15	

C

11	24	7	20	3
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15

D

11	20	7	24	3
10	14	1	18	22
17	21	13	5	9
4	8	25	12	16
23	2	19	6	15

Voyez la figure B.

Considérant que les nombres des diagonales également distans du milieu 13, & pris deux, à deux font toûjours un mesme nombre, sçavoir le double de 13 : car de là s'ensuit que mettant la ligne *bg*, à la place de *dl*, on aura la table suivante qui est encore selon les régles, veu que la ligne *bg* estant égale à *dl*, la transposition ne leur apporte aucun changement, non plus qu'aux lignes, *ae*, *αβ*, *γδ*, &c. desquelles on n'oste aucun nombre.

Toute la difficulté se pourroit rencontrer aux diagonales, mais les nombres également distans du milieu 13, faisant tous une mesme somme (ce qui arrive en toutes les tables faites comme il a esté montré cy-devant) on n'oste rien à l'une des diagonales, qu'on n'en remette autant en nombres équivalants ; ainsi en la diagonale *ef*, de la table A, au lieu de 8, 18, qui font 26, on remettra 12, 14, qui font pareillement 26.

On

On pourra encore changer la figure A, en transposant la ligne $\alpha\beta$, & la mettant en la place de $\varepsilon\eta$, comme on voit cy-dessus en la figure C.

Aprés on changera tout ensemble les lignes *bg*, $\alpha\beta$, de la figure A, mettant *bg* à la place de *dl*, & $\alpha\beta$, à la place de $\varepsilon\eta$: ou ce qui est la mesme chose, mettant seulement $\alpha\beta$, de la figure B, en la place de $\varepsilon\eta$, on aura la figure D.

On changera encore d'une autre sorte la figure A, en mettant εp, à la place de *dl*, & *af*, à la place de *bg*.

Comme aussi on pourra mettre $a\varepsilon$, à la place de $\alpha\beta$, & *fp*, à la place de $\varepsilon\eta$.

Enfin on fera tous ces changemens ensemble, ce qui donnera les trois figures suivantes; en la premiére desquelles est le premier changement; en la séconde le sécond; & en la troisiéme les deux ensemble.

Prémiére.

24	11	7	3	20
12	4	25	16	8
5	17	13	9	21
18	10	1	22	14
6	23	19	15	2

Séconde.

4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
10	18	1	14	22

Troisiéme.

12	4	25	16	8
24	11	7	3	20
5	17	13	9	21
6	23	19	15	2
18	10	1	22	14

Si on donne à la figure B, les trois changemens, on aura aussi pareillement trois autres figures, qui sont les suivantes.

20	11	7	3	24
8	4	25	16	12
21	17	13	9	5
14	10	1	22	18
2	23	19	15	6

4	8	25	12	16
11	20	7	24	3
17	21	13	5	9
23	2	19	6	15
10	14	1	18	22

8	4	25	16	12
20	11	7	3	24
21	17	13	9	5
2	23	19	15	6
14	10	1	22	18

Pareils changements estant observez en C, donneront

24	11	7	3	20
18	10	1	22	14
5	17	13	9	21
12	4	25	16	8
6	23	19	15	2

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

18	10	1	22	14
24	11	7	3	20
5	17	13	9	21
6	23	19	15	2
12	4	25	16	8

De la figure D, on aura aussi les deux suivantes:

20	11	7	3	24
14	10	1	22	18
21	17	13	9	5
8	4	25	16	12
2	23	19	15	6

10	14	1	18	22
11	20	7	24	3
17	21	13	5	9
23	2	19	6	15
4	8	25	12	16

La troisiéme est semblable à une figure qui est cy-devant au bas de la page 223, & dont la premiére ligne est 12, 16, 25, 4, 8.

On aura donc par ce moyen quatorze transpositions de la figure marquée A, en la page 217, qui avec la figure A, font quinze figures, & parce qu'ensuite de la figure A, il y a encore 15 autres figures; qui se font par le rombe ou chassis; comme on peut voir aux pages 217, 218, 220, 221, 222 223, 224, 225; si chacune d'elles donne autant de figures différentes, on auroit en tout 240. figures: mais il faut prendre garde s'il n'y aura point de figures semblables parmi ce nombre.

Voicy des éxemples de la figure B, de la page 217, que nous avons remise icy, afin de la comparer avec celles qui en proviennent.

11	19	2	25	8	
9	12	20	3	21	
22	10	13	16	4	B.
5	23	6	14	17	
18	1	24	7	15	

11	25	2	19	8
9	3	20	12	21
22	16	13	10	4
5	14	6	23	17
18	7	24	1	15

11	19	2	25	8
5	23	6	14	17
22	10	13	16	4
9	12	20	3	21
18	1	24	7	15

11	25	2	19	8
5	14	6	23	17
22	16	13	10	4
9	3	20	12	21
18	7	24	1	15

Ce sont là les premiers changemens, chacun desquels souffre encore d'autres transpositions, ainsi que l'on a peû remarquer en la figure A, & qui donnent les figures suivantes.

9	12	20	3	21
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
5	23	6	14	17

19	11	2	8	25
12	9	20	21	3
10	22	13	4	16
23	5	6	17	14
1	18	24	15	7

1	18	24	15	7
12	9	20	21	3
10	22	13	4	16
23	5	6	17	14
19	11	2	8	25

9	3	20	12	21
11	25	2	19	8
22	16	13	10	4
18	7	24	1	15
5	14	6	23	17

25	11	2	8	19
3	9	20	21	12
16	22	13	4	10
14	5	6	17	23
7	18	24	15	1

3	9	20	21	12
25	11	2	8	19
16	22	13	4	10
7	18	24	15	1
14	5	6	17	23

5	23	6	14	17
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
2	12	20	3	21

23	5	6	17	14
19	11	2	8	25
10	22	13	4	16
1	18	24	15	7
12	9	20	21	3

5	14	6	23	17
11	25	2	19	8
22	16	13	10	4
18	7	24	1	15
9	3	20	12	21

25	11	2	8	19
14	5	6	17	23
16	22	13	4	10
3	9	20	21	12
7	18	24	15	1

Les deux places vuides montrent que les figures qui y devroient estre sont semblables à quelques-unes des tables précédentes, & elles ont esté obmises pour éviter la répétition.

On peut donc voir, que la table B, se varie en 14 façons elle comprise; mais la précédente table A, se varie en 15 sortes, d'où s'ensuit qu'on n'aura pas 240. variations en tout, car il faudroit que chacune des tables eust autant de variations que la premiére, ce qui n'est pas à cause que les mesmes reviennent.

On pourra faire les variations des autres tables ainsi qu'on a fait aux deux premieres A, & B, de la page 217.

Il se trouve encore d'autres variations, qui ne sont pas si faciles que les précédentes; sçavoir celles ausquelles le nombre 13, qui tient le milieu à toutes les tables précédentes se trouve changé, & hors de cette place.

Mais toutes les tables précédentes ne peuvent pas souffrir cette variation car entre les premiéres qui se font par les rombes ou chassis, il n'y a que la premiére marquée A, & la derniére de la page 223, & cette façon de changement, sçavoir de la figure A, ne fait pas que toutes sortes de nombres puissent occuper le milieu; mais on n'y pourra placer par cette voye que 7, 9, 17, 19.

Les autres figures qui sont ensuite des premiéres, donnent bien aussi quelques variations, qui néantmoins se peuvent faire sans elles en conséquence des changements des deux premiéres

Voicy donc de qu'elle façon on changera la figure A.

	a			c			e
		11	24	7	20	3	
		4	12	25	8	16	
A	g	17	5	13	21	9	d
		10	18	1	14	22	
		23	6	19	2	15	
	f			b			p

Cette

Cette figure se changera en quatre façons.

La premiére, mettant la ligne *ae*, à la place de *γδ*.

La séconde, mettant la ligne *ep*, à la place de *cb*.

La troisiéme, mettant la ligne *fp*, au lieu de *γδ*.

Et la quatriéme, mettant la ligne *af*, au lieu de *cb*. Et on aura les quatre figures suivantes, la premiére desquelles a 7 au milieu, au lieu de 13, laséconde a 9 au milieu, la troisiéme a 19, & la quatriéme 17.

	17	5	13	21	9
	4	12	25	8	16
H	11	24	7	20	3
	10	18	1	14	22
	23	6	19	2	15

11	24	3	20	7
4	12	16	8	25
17	5	9	21	13
10	18	22	14	1
23	6	15	2	19

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9

On fera les mesmes changemens à cette autre figure marquée L, qui suit, comme on le peut voir: mais il faut montrer que ce changement-cy ne peut apporter aucune inégalité aux lignes, & par conséquent que les figures mêlées demeureront bonnes.

7	24	11	20	3
25	12	4	8	16
13	5	17	21	9
1	18	10	14	22
19	6	23	2	15

Parce qu'on transporte la ligne toute entiére de sa place, il ne peut pas arriver d'inégalité aux lignes; & toute l'inégalité qui pourroit survenir par ce changement, seroit aux diagonales. Mais le tout est bien récompensé; car au premier changement on met 7 à la place de 13, d'où il arriveroit que chacune des diagonales auroit faute de 6, mais ce 6 est mis en chacune d'elles en changeant les lignes, car mettant la ligne *γδ*, de la table A, à la place de *ae*, 17 occupera la place de 11, d'où vient que la diagonale *ap*, est augmentée de 6, ce qui récompense la diminution précédente de 7, au lieu de 13.

Pareillement 9 viendra à la place de 3, ce qui corrigera le défaut de la diagonale *ef*.

On

On vérifiera de la mesme sorte, que les autres changemens n'ostent point les égalitez qui sont requises aux tables.

La figure L, sera variée en la mesme maniére; mais il faudra prendre une des lignes du milieu, au lieu qu'on changeoit les extrémes à la table précédente, comme on peut voir icy,

		α	*c*	*ι*			
	12	16	25	4	8		
a	6	15	19	23	2	*e*	
γ	5	9	13	17	21	*δ*	L
f	24	3	7	11	20	*p*	
	18	22	1	10	14		
		β	*b*	*η*			

où on changera *αβ*, en *cb*, pour avoir la premiére figure; *ιη*, en *cb* pour la séconde; *ae* en *γδ*, pour la troisiéme; & enfin *fp*, en *γδ*, pour la derniére: & on aura les figures suivantes.

12	25	16	4	8
6	19	15	23	2
5	13	9	17	21
24	7	3	11	20
18	1	22	10	14

12	16	4	25	8
6	15	23	19	2
5	9	17	13	21
24	3	11	7	20
18	22	10	1	14

12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14

Chacune de ces figures, & des quatre autres précédentes qui sont en l'autre page, souffrent encore plusieurs sortes de changemens, dont on donnera icy quelques éxemples.

Pre-

Premiérement on leur peut attribuer les meſmes changemens qu'à la figure dont elles proviennent : ainſi la premiére figure de celles qui viennent de A, ſçavoir celle qui eſt icy marquée H, ſouffre les meſmes variations que A, car on pourra tranſpoſer *af*, & *ep*, en *cb*, & pareillement *ae*, & *fp*, en

	a		*c*		*e*	
	17	5	13	21	9	
	4	12	25	8	16	
H *γ*	11	24	7	20	3	*δ*
ε	10	18	1	14	22	*η*
	23	6	10	2	15	
	f		*b*		*p*	

γδ, mais entre ces tables il y en auroit une ſemblable à la table A : on mettra ſeulement icy celles qui ont un nouveau nombre au milieu ; car il n'y a aucun nombre impair, qui ne puiſſe tenir le milieu de la figure, comme l'on voit par les ſuivantes.

13	5	17	21	9
25	12	4	8	16
7	24	11	20	3
1	18	10	14	22
19	6	23	2	15

17	5	9	21	13
4	12	16	8	25
11	24	3	20	7
10	18	22	14	1
23	6	15	2	19

De ces deux on pourra auſſi faire les ſuivantes.

13	5	17	21	9
25	12	4	8	16
19	6	23	2	15
1	18	10	14	22
7	24	11	20	3

17	5	9	21	13
4	12	16	8	25
23	6	15	2	19
10	18	22	14	1
11	24	3	20	7

Il y a encore une autre tranſpoſition de la figure H cy-devant, ſçavoir en mettant *εη*, à la place de *γδ*, comme on voit icy.

17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
23	6	19	2	15

 Et

Et changeant en cette meſme ſorte les trois autres figures de la page 231. on aura les ſuivantes.

11	3	24	20	7
4	16	12	8	25
17	9	5	21	13
10	22	18	14	1
23	15	6	2	19

11	24	7	20	3
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9

7	24	20	11	3
25	12	8	4	16
13	5	21	17	9
1	18	14	10	22
19	6	2	23	15

On a donc icy des éxemples de tous les nombres impairs qui tiennent le milieu des figures ; pour ce qui eſt des nombres pairs, il y auroit plus de difficulté à leur faire tenir le milieu de la figure, & peut-eſtre il eſt impoſſible.

Ces figures ſe varient encore d'une autre ſorte, dont il a eſté fait mention cy-devant : par éxemple, la figure H ſe variera, mettant *ab*,

a						*b*	
	17	5	13	21	9		
	4	12	25	8	16		
	11	24	7	20	3		H
f	10	18	1	14	22	*g*	
	23	6	19	2	15		
c						*d*	

en la place de *cd*, comme auſſi *ac*, en la place de *bd* : & enfin, aſſemblant ces deux variations ; ſçavoir, tranſpoſant tout enſemble *ab*, en *cd*, & *ac*, en *bd*, on aura les trois tables ſuivantes.

	9	5	13	21	17
	16	12	25	8	4
F	3	24	7	20	11
	22	18	1	14	10
	15	6	19	2	23

23	6	19	2	15
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9

15	6	19	2	23
16	12	25	8	4
3	24	7	20	11
22	18	1	14	10
9	5	13	21	17

Les

Les autres tables peuvent souffrir les mesmes variations, qui seroient trop longues à déduire, & cela sera une fort grande quantité de tables différentes: & celles-cy suffiront pour faire voir de quelle façon elles se pourront trouver.

On pourra encore faire d'autres sortes de transpositions; par éxemple, de la figure F, mettant la ligne 9, 5, 13, 21, 17, à la place de 16, 12, 25, 8, 4, parce que 17, & 8, qui sont dans la diagonale, sont égaux à 21, & 4. Et pareillement de l'autre costé 16, & 5, sont égaux à 9 & 12, & pareillement on pourra mettre la ligne 3, 24, 7, 20, 11, à la place de 22, 18, 1, 14, 10, parce que 14, & 7, en la diagonale sont égaux à 20, & 1; & pareillement 7, & 18, sont égaux à 24, & 1.

Comme aussi en la figure H, on pourroit transporter la ligne 17, 5, 13, 21, 9, à la place de 10, 18, 1, 14, 22, parce que les nombres de la diagonale 9, & 18, sont égaux à 5, 22, & les deux 17, 14, à 21, & 10. On peut voir ces deux tables transposées à la page suivante, & cette transposition se peut faire toutesfois & quantes qu'on peut choisir un quarré dans la figure qui ait deux de ses angles dans la diagonale de la figure, & auquel les nombres des angles opposez soient égaux à ceux des deux autres angles, & que la mesme chose arrive au quarré pris dans les mesmes lignes qui bornent le quarré dans l'autre costé de la figure.

Ainsi en la figure H je choisis un quarré dont les angles sont 5, 9, 22, 18, dont deux, sçavoir 18 & 9, sont dans la diagonale, & les angles opposez, comme 18 & 9, sont ensemble égaux aux deux autres 22 & 5; & si on prend le quarré qui est de l'autre costé de la figure entre les mesmes lignes *ab*, & *fg*, dont les angles sont 17, 21, 14, 10, on trouvéra de mesme que les angles opposez 17, 14, sont égaux aux deux autres 10, 21.

16	12	25	8	4
9	5	13	21	17
3	24	7	20	11
22	18	1	14	10
15	6	19	2	23

9	5	13	21	17
16	12	25	8	4
22	18	1	14	10
3	24	7	20	11
15	6	19	2	23

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15

Les tables, dont le coſté eſt pair, ſe trouvéront d'une autre façon, laquelle eſt auſſi commune avec les impairs; mais premiérement nous donnerons celle de 16, qui a 4 de coſté.

Il faut diſpoſer les 16 nombres ſelon leur ordre naturel, comme on voit icy.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Puis on marque les diagonales avec des points, afin de remarquer les nombres qui s'y trouvent, car les meſmes ſeront auſſi dans les diagonales de la table, en meſme ſituation qu'ils ſont icy. Je mets donc à part les nombres qui compoſent les diagonales en la meſme diſpoſition, comme il eſt icy marqué.

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Et pour achever la table on met les nombres qui ſont hors des diagonales, vers leurs oppoſez en croix; ſçavoir 14 à la place de 3, 15 à la place de 2, 12 à la place de 5, & 8 à la place 9, & on aura la figure ſuivante.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

METODE GENERALE.

pour faire les Tables Magiques.

PAR la méthode ſuivante on pourra faire toutes ſortes de tables tant paires qu'impaires, mais il faut rémarquer une proprité particuliére des tables faites par cette méthode, qui eſt que ſi on oſte l'enceinte de quelqu'une de ces tables, celle qui reſtera ne laiſſera pas d'avoir encore toutes ſes lignes égales; & ſi de ce reſte on oſte encore une enceinte, le reſte aura encore ſes lignes égales, & ainſi juſqu'à ce que la derniére table qui reſte n'ait plus que 4 de coſté, ſi elle eſt paire, & 3 de coſté ſi elle eſt impaire: car il n'y a point de table de 4 de coſté, dont oſtant une enceinte, le reſte ait ſes lignes égales.

Exemple. Que la table ait 12 de chaque coſté, ſi on oſte la premiére enceinte, il reſtera une table qui aura 10 à chacun de ſes coſtez, & qui aura encore ſes lignes égales. Et oſtant une enceinte de cette table de 10, on aura une table de 8 qui aura encore toutes ſes lignes égales.

Et ſi de cette table de 8 on oſte encore une enceinte, il reſtera une table de 6.

Enfin ſi on oſte une enceinte de cette table de 6, il reſtera une table de 4, qui aura encore les conditions réquiſes.

Et ainſi ayant une table de 12, on en aura auſſi une de 10, une de 8, une de 6, & de 4.

On trouve enſuite des moyens pour faire qu'il n'y ait qu'une ſeule table qui ſoit bonne, & qu'oſtant les enceintes, celle qui reſte ne ſoit plus ſelon les régles; ou ſi l'on veut, telle table qu'on

voudra ſera bonne, & les autres ne vaudront rien. Ainſi ayant une table de 12, on pourra faire qu'oſtant quelques enceintes qu'on voudra, le reſte ne ſoit pas bon ; ou bien que les tables de 8 & de 4 qui y ſont contenuës, ſeront bonnes, & les autres non ; & cela ſe peut faire en toutes les maniéres qu'on voudra.

Mais parce que les éxemples apprendront mieux la maniére de faire ces tables, que tous les préceptes qu'on en pourroit donner, il ſera plus à propos de faire connoiſtre ceux-cy par le moyen de ceux-là.

Exemple premier d'une table de 6.

Il faut en premier lieu diſpoſer les nombres dont on doit remplir les 36 cellules de la table, ſelon leur ordre naturel, & en faire deux lignes qui ſeront l'une deſſus l'autre, en telle ſorte que les nombres des deux lignes qui ſont l'un ſur l'autre faſſent 37, ſçavoir 1, plus que le plus grand nombre, qui eſt 36, comme on les voit icy ; & les nombres de ces deux lignes ſe nommeront rélatifs : ainſi 35 eſt relatif de 2, 34 de 3, & ainſi des autres : de meſme 6 ſera rélatif de 31, 7 de 30, &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Et cela ſe doit obſerver en toutes tables, afin de pouvoir avec plus de facilité choiſir les nombres dont on a beſoin.

Aprés on prendra ſeize nombres, ſçavoir huit de la premiere ligne, & les huit correſpondans ou rélatifs dans la ſéconde. Il ſera bon que les huit nombres ſoient de ſuitte, ou qu'ils ayent entre eux une différence égale, quoy-qu'il ſuffiſe que quatre de ces nombres ayent une meſme différence, & les quatre autres auſſi, & en ſuite on prendra leur rélatifs ; car en cette façon de conſtruire les tables, il faut eſtre ſoigneux de ne prendre jamais un

un nombre, qu'on ne ſe ſerve auſſi de ſon rélatif, autrement on ne pourroit pas faire une table par cette méthode.

Je prens donc les huit premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, & leurs rélatifs 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, qui ſont ſeize nombres, dont je fais une table de 4, ainſi qu'il a eſté enſeigné à la page 236 du Traité précédent; ſçavoir écrivant les ſeize nombres, comme on voit icy.

1	2	3	4
5	6	7	8
29	30	31	32
33	34	35	36

Puis retenant les diagonales, comme l'on voit dans la figure ſuivante.

1			4
	6	7	
	30	31	
33			36

Et enfin rempliſſant les eſpaces vuides, en y mettant les nombres oppoſez en croix; ſçavoir 35 à la place de 2, & 2 à la place de 35, puis 34 à la place de 3, & ainſi des autres, on aura la figure diſpoſée comme il ſuit.

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Ce

Ces nombres étant employez, je les marque par quelque ſigne, comme on peut voir en la page 238, où tous les trente-ſix nombres ſont de ſuite en deux lignes, afin qu'on puiſſe connoiſtre ceux qui ont déja ſervi à faire la table intérieure, & qu'on ne prenne point deux fois un meſme nombre.

Cela fait, je choiſis deux nombres de ceux qui reſtent, pour mettre prés des angles de la figure de quatre, ſçavoir en continuation de ſa diagonale, qui ſerviront d'angles à l'autre enceinte extérieure.

On prendra par éxemple 9 & 10 pour les deux angles, ou extrémitez d'une meſme ligne.

Ayant mis les nombres 9 & 10 aux angles prochains, & non pas oppoſez, je mets leurs complémens aux angles oppoſez, comme on voit icy, ſçavoir 28 à l'oppoſite de 9, & 27 à l'oppoſite de 10.

9					10
	1	35	34	4	
	32	6	7	29	
	8	30	31	5	
	33	3	2	36	
27					28

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Cela fait je conſidére ce qu'il faut dans deux lignes prochaines de la derniére enceinte pour les achever; car lors qu'on a deux lignes prochaines, les complémens des nombres donnent les oppoſez. Je trouve que dans la ligne 9, 10, il faut 92 pour parfaire la ligne; car chaque ligne doit eſtre de 111; ce qui ſe trouve multipliant la ſomme des deux nombres extrémes de la figure, qui ſont 1, & 36, dont la ſomme eſt 37, par la moitié des nombres qui ſont en chaque ligne, ſçavoir par 3.

Et de ce produit 111, oſtant 19, qui eſt la ſomme de 9 & 10, il reſtera 92 pour la ſomme des quatre nombres qui doivent eſtre mis entre 9 & 10.

De mesme, si de 111 j'oste 38, qui est la somme de 28 & 10, qui sont aux angles qui bornent la ligne 10, 28, il restera 73 pour les quatre nombres qui manquent à ligne 10, 28.

Il faut donc chercher dans les nombres qui restent, quatre nombres, dont la somme soit 92, & quatre autres dont la somme soit 73, à telle condition toutefois, qu'aprés avoir pris un nombre, on ne se serve plus de son complément dans ces deux premiéres lignes, parce que ce complément doit estre mis dans la ligne opposée; ce qui doit toujours estre éxactement observé.

Pour venir plus facilement à bout de cela, l'on écrira les nombres qui restent de suite, & leurs complémens au dessous, comme il suit.

11	12	13	14	15	16	17	18
26	25	24	23	22	21	20	19
|	|		|				|

Cela fait, je cherche quatre nombres dans ces deux lignes qui fassent 92: je trouve 26, 25, 23, 18: je les marque au dessous avec de petites lignes, afin de ne les plus reprendre, ny leur complémens aussi. Aprés, je choisis quatre nombres dans les huit qui restent, qui fassent 73; mais en choisissant les deux premiers, il faut fare en sorte qu'il ne reste pas 37 pour les deux autres, ainsi les deux nombres ne pourront pas estre 16, & 20, qui font 36, parce qu'il resteroit 37 pour les deux autres nombres, ce qui ne se peut faire que par deux rélatifs, comme par 15, 22, & 13, 24, ce qui est contre les régles; c'est pourquoy il faudra prendre deux nombres qui fassent plus ou moins de 36, comme 21, & 17, qui font 38, & reste 35. Pour achever 73, on fera 35 avec 13, & 22: on aura donc les quatre nombres 21, 17, 13, 22, qu'on mettra entre 10, & 28, & il n'importe pas en quel ordre, pourveu que vis-à-vis d'eux en la mesme ligne de la colomne opposée; sçavoir entre 9, & 27, on mette leurs complémens selon le mesme ordre, comme on voit en la figure qui est achevée en la page précédente.

De mesme, je mets entre 9 & 10 les quatre nombres qui ont esté premiérement trouvez, sçavoir 26, 25, 23, 18; & vis-à-vis en la ligne opposée, & entre 27, 28, je mets leurs complémens 11, 12, 14, 19. Et ainsi on aura la figure parfaite.

Sécond éxemple de la table de 6.

Il y a une chose à observer quand les nombres de la table intérieure de quatre sont tout de suite, & que les vingt de l'enceinte extérieure sont les dix premiers, & leurs complémens; sçavoir,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

En ce cas il ne faudra pas prendre pour les angles prochains, deux nombres qui soient en quotité pairs ou impairs, sçavoir en cet éxemple deux pairs ou deux impairs, comme 2, 4, ou 3, 5, ou 5, 9, & autres semblables, autrement on ne pourroit pas achever la table, parce qu'il arrive toûjours en faisant la seconde ligne, que la somme des nombres est paire quand elle doit estre impaire; & au contraire, la raison est qu'en la séconde ligne il faut toûjours prendre deux des grands nombres, & deux des moindres, à cause qu'ils sont beaucoup différens l'un de l'autre.

Voicy une table qui a ces nombres à son enceinte extérieure.

1	8	31	32	35	4
27	11	25	24	14	10
34	22	16	17	19	3
9	18	20	21	15	28
7	23	13	12	26	30
33	29	6	5	2	36

1] 2 3 5 6 7 8 9 10 [4 [106
35 34 32 31 30 29 28 27 71

Il arrive assez souvent en ces petites figures, a cause du peu de nom-

nombres qu'il y a en chaque ligne, qu'ayant choisi les quatre pour la premiére ligne, ceux de la séconde ne peuvent pas faire la somme qui seroit nécéssaire; comme en cet éxemple, si entre 1 & 4 on mettoit 35, 32, 30, 9, qui ensemble font 106, ainsi qu'il est requis, il resteroit 3, 6, 8, 10, & leurs complémens 34, 31, 29, 27, qu'on ne peut pas employer pour faire 71, qui est la somme que doivent avoir les quatre nombres qu'on doit mettre entre 4 & 36, c'est pourquoy on changera les quatre de la premiére ligne qui sont entre les angles, & au lieu de 35, 32, 30, 9, on en prendra d'autres équivalens; par éxemple, 35, 32, 29, 10. Mais parce que les nombres qui restent pour l'autre ligne ne peuvent pas encore faire 71, il les faudra encore changer, & prendre 35, 31, 30, 10, & ceux qui resteront pourront faire 71, comme l'on voit assemblant les quatre nombres, 3, 8, 28, 32.

Que si aprés avoir changé les lignes en diverses maniéres, on ne pouvoit trouver son compte, il faudroit avoir recours aux angles & les changer, ou du moins l'un d'eux, & son complément, tant que la difficulté cesse.

Enfin cela dépend plus de l'industrie de celuy qui cherche, que non pas de certaine régle infaillible qu'on pourroit donner pour cet effet, laquelle se peut bien trouver pour les impairs, comme il a esté montré cy-devant, mais la mesme chose ne succéde pas aux tables paires. Voicy pourtant une méthode qui facilitera beaucoup cette récherche.

Ayant écrit les huit nombres entre les deux qui sont aux angles, comme on voit au bas de la page precedente on mettra en suite la valeur des quatre nombres qui doivent estre entre 1 & 4, qui est 106, parce qu'ostant 5, sçavoir la somme de 4 & 1, de 111, qui est la valeur de chaque ligne, il reste 106; on mettra aussi la valeur des quatre nombres qui doivent estre entre 4 & 36, qui est 71; je cherche aprés quatre nombres dans les seize des deux lignes, qui vallent 106, à telle condition qu'aprés avoir pris un des

nom-

nombres, on ne prenne pas aussi son complément, & commençant par les deux plus grands 35 & 34, qui ensemble vallent 69, il faut oster cette somme de 106, reste 37; qui estant la somme des deux rélatifs, ne peut pas estre employée dans ces tables. Il faut donc prendre deux autres nombres, sçavoir 35 & 32, la somme est 67, qui ostée de 106, reste 39, on fera 39 avec 31, 8: on aura donc les quatre nombres 35, 32, 31, 8, qu'il faudra mettre entre 1 & 4 de la table A. Il faut aprés remplir la ligne 4, 36 avec quatre des nombres qui restent, qui sont 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27.

Voicy comme on y procédera. Il faut assembler les quatre moindres nombres, sçavoir 3, 7, 9, 10: la somme est 29, qui ostée de 71 qui est la valeur de quatre nombres, qui doivent estre mis entre 4 & 36 de la table A, reste 42. Il faut voir si on

A

1					4
	11	25	24	14	
	22	16	17	19	
	18	20	21	15	
	23	13	12	26	
33					36

pourra faire 42 avec la différence qui est entre les quatre nombres 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27; comme on

3	7	9	10
31	23	19	17
34	30	28	27

peut voir en cette figure, & leur différence entre deux; on trouve 23 & 19 différences entre 7, 30, & 9, 28, qui font 42. On prendra donc 3, 30, 28, 10, pour les quatre nombres qui doi-

doivent estre mis entre 4, 36, qui sont aux extrémitez de la derniére colomne, car puisque les quatre nombres 3, 7, 9, 10, manquent de 42 pour faire 71, qui est la valeur de quatre nombres qui doivent estre entre 4 & 36, & que 30 & 28 surpassent 7 & 9 de 42, il faudra prendre 30 & 28, au lieu de 7 & 9; on aura donc la table accomplie, comme on la voit icy, mettant les

1	35	32	31	8	4
34	11	25	24	14	3
7	22	16	17	19	30
9	18	20	21	15	28
27	23	13	12	26	10
33	2	5	6	29	36

quatre nombres cy-devant trouvez, sçavoir 35, 32, 31, 8, entre 1 & 4, & les complémens de ces nombres 2, 5, 6, 29, en la mesme colomne, & vis à vis des précédens en la ligne opposée, avec les deux nombres 33 complément de 4, & 36 complément de 1, qu'il faut mettre aux angles en mesme diagonale : puis entre 4 & 36 on mettra les quatre autres nombres 3, 30, 28, 10, & leurs rélatifs 34, 7, 9, 27, vis à vis des précédens dans la colomne opposée, & à l'autre extrémité de la mesme ligne.

Si on avoit pris 1, 3, pour les nombres qui doivent estre aux angles, ou aux extrémitez d'une mesme ligne, on ne pourroit pas parfaire cette ligne, comme il a esté remarqué cy-devant. La raison est, qu'on est obligé pour faire 107, de prendre trois nom-

1]	2	4	5	6	7	8	9	10	[3	107
	35	33	32	31	30	29	28	27		72

bres de la ligne inférieure, où sont les plus grands nombres, & un de la supérieure, parce que les quatre moindres de la ligne inférieure, sçavoir 27, 28, 29, 30, font plus de 107, encore

que 107 soit le plus grand nombre que puissent avoir les quatre nombres, en prenant des nombres semblables pour les angles, sçavoir tous deux pairs ou impairs, & si on n'en prenoit que deux dans la ligne inférieure, & deux dans la supérieure, ils ne seroient pas assez grands; car encore que l'on mit aux angles les plus grands nombres de la ligne supérieure, sçavoir 8 & 10 qui sont semblables en parité ou imparité, etant tous deux pairs, il resteroit 93 pour la somme des quatre nombres qui devroient estre entre deux. Or prenant les deux plus grands nombres de la ligne inférieure, & les deux plus grands de la supérieure, sçavoir 35, 33, 7, 9, ils feront moins de 93. Il faut donc prendre trois nombres de la ligne inférieure, & un de la supérieure.

Or aprés avoir pris ces quatre nombres qui fassent 107, ou autre nombre réquis: Par éxemple, aprés avoir pris 35, 33, 32, 7, qui font 107, on ne pourra jamais faire 72, qui est la somme des nombres qui doivent faire l'autre ligne, avec quatre des nombres qui restent; car prenant deux de ces nombres dans la ligne inférieure, & deux dans la supérieure, comme il est nécessaire pour faire 72, sçavoir la somme des quatre nombres qui doi-

1]	2	4	5	6	7	8	9	10	[3	107
	35	33	32	31	30	29	28	27		72

vent achever l'autre ligne; en sorte que dans ces quatre nombres il n'y en ait point deux qui soient rélatifs, c'est à dire dont la somme fasse 37, car il arrivera toûjours que la somme de ces quatre nombres sera un nombre impair, au lieu que 72 est pair. Ainsi prenant 31, 29, qui ensemble font un nombre pair, il restera 9, 10, qui ensemble font un impair, & ainsi la somme des quatre sera impaire.

De mesme, si on prenoit 31, 28, dont la somme est impaire, les deux autres qui restent seroient 10, 8, dont la somme est paire, qui jointe à la somme précédente qui est impaire, la somme

sera

fera encore impaire; & cela arrivera toûjours de la mesme façon, si ce n'est que les nombres soient tels, qu'on puisse prendre pour la séconde ligne trois nombres dans une des lignes, & un dans l'autre; ou bien que pour la premiére ligne, on puisse prendre tous les quatre nombres dans une mesme ligne.

Pour les tables impaires, si on les veut faire en la mesme maniére que les paires; sçavoir, faisant que les rélatifs soient opposez, il faut prendre garde qu'entre les nombres qui doivent servir à remplir les deux costez prochains, c'est-à-dire, qui aboutissent à un mesme angle; aprés que ceux des angles seront placez, s'il se trouve des impairs ils doivent estre en multitude paire, comme 2, 4, ou 6, &c. ce qui se doit entendre prenant le nombre & son complément pour un seul nombre, car s'il n'y avoit qu'un impair, ou 3, ou 5, ou autre multitude impaire pour les deux lignes qu'il faut remplir, cela ne se pourroit; la raison est, que si les deux nombres des angles sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, la somme des nombres qui restent à mettre en chaque ligne doit estre impaire; à cause que la somme des nombres de la ligne doit estre impaire, supposant que les nombres commencent par 1, & soient de suite. Si donc on avoit trois impairs, ou autre multitude impaire, il faudroit les mettre tous trois dans une mesme ligne pour la faire impaire, ou si l'on n'en mettoit qu'un, il en resteroit deux pour l'autre ligne, ce qui fera que cette portion de ligne sera paire, sçavoir autrement qu'elle ne doit estre, à cause des nombres qui sont aux angles, dont la somme est paire, & joignant cette paire à l'autre portion de ligne qui seroit aussi paire, sçavoir la portion qui est entre ses deux angles, feroit toute la ligne paire; mais elle doit estre impaire.

Que si le nombre de l'un des angles est pair, & l'autre impair, la somme des nombres qui restent à mettre à chaque ligne sera paire; & ainsi estant contraint de mettre à une des lignes un ou trois impairs, cela fera que la portion de la ligne qui est entre deux angles sera impaire, sçavoir autrement qu'elle ne doit estre.

Ainsi

Ainsi aprés avoir fait la table de trois, qui est cy-dessous, pour faire l'enceinte extérieure de cinq, on a de reste les nombres 1, 3, 4, 6, &c. & leurs complémens, comme on voit en suite. Si on met donc 1 à l'un des angles, & son complément 25 à l'angle opposé, & qu'à l'autre angle on mette le nombre suivant 3, il resteroit trois impairs dans la ligne supérieure pour remplir les deux lignes, sçavoir 7, 9, 11, c'est pourquoy on ne pourra pas mettre 3 à cet angle, ny aucun autre impair, mais un pair comme 4, parce que mettant 4, il restera 4 impairs; sçavoir 3, 7, 9, 11, & on pourra achever la table de 5, comme on la voit en suite.

1	3	4	6	7	9	11	12
25	23	22	20	19	17	15	14

1				4
	10	24	5	
	8	13	18	
	21	2	16	
22				25

1	23	20	17	4
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
22	3	6	9	25

Troisiéme exemple de 6.

On n'est pas obligé de prendre huit nombres de suite, & leurs complémens, pour faire la table intérieure qui a quatre de costé; mais il suffit que quatre de ces nombres ayent mesme différence, & les quatre autres pareillement. Ainsi on pourra prendre 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, & leurs complémens 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, pour la table de quatre qui sera

1	35	34	4
29	9	10	26
11	27	28	8
33	3	2	36

13	22	20	30	12	14
5	1	35	34	4	32
31	29	9	10	26	6
21	11	27	28	8	16
18	33	3	2	36	19
23	15	17	7	25	24

Et

Et prenant pour les angles 13 & 14, & leurs complémens 24 & 23, on aura la figure de 6 cy-jointe.

Quatriéme éxemple de 6.

On peut auſſi commencer les huit, & leurs complémens, de la table intérieure de quatre, par un autre nombre que 1, & auſſi ne les point prendre de ſuite, comme on voit en la table ſuivante, en laquelle on a pour la table intérieure de 4, les nombres 2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 19, & leurs complémens 18, 20, 22, 24, 29, 31, 33, 35. Laquelle table de 4 ſera,

2	33	31	8
24	15	17	18
19	20	22	13
29	6	4	35

A B

1	34	27	26	16	7
9	2	33	31	8	28
14	24	15	17	18	23
25	19	20	22	13	12
32	29	6	4	35	5
30	3	10	11	21	36

D C

Et prenant pour les angles 1 & 7, & leurs complémens 36, 30 on fera la derniére enceinte qui eſt l'extérieure des nombres qu'on voit à la figure cy-deſſus.

Cette derniére façon ſe trouve aſſez ſouvent difficile, car il peut arriver qu'on prendra pour les angles de tels nombres, que les lignes de l'enceinte extérieure ne pourront pas eſtre remplies, ou ce ne ſera qu'aprés une recherche ennuieuſe. Par éxemple, ſi on prenoit 10 & 16, & leurs complémens 27 & 21 pour les angles de l'enceinte extérieure, au lieu de 1, 7, 36, 30, on ne pourroit parfaire la figure, & on ſeroit contraint de prendre d'autres nombres pour les angles.

Pour voir maintenant de quels nombres il faut remplir les lignes, je conſidére combien il faut de reſte à chaque ligne, ou plû-

plûtost à deux, sçavoir à deux lignes qui ne soient point opposées l'une à l'autre: Par éxemple, je cherche combien il faut pour achever la ligne A B, & la ligne B C, ausquelles on suppose déja les coins 1, 7, & 7, 36.

Or parce que chaque ligne doit contenir 111 en ses six nombres, il faut pour la ligne A B, prendre la somme de 1 & 7, qui est 8, & l'oster de 111, restera 103 que doivent faire les quatre nombres qui restent à trouver pour la ligne A B.

De mesme je prens la somme de 7 & 36, qui est 43, que j'oste de 111, reste 68 pour les quatre nombres qu'il faut mettre à la ligne B C.

Pour les deux autres lignes C D, & A D, il ne s'en faut pas mettre en peine; car elles s'ensuivent nécéssairement de leurs opposées A B, B C, puisque l'une des lignes doit avoir les complémens de la ligne qui luy est opposée.

Je prens aprés, les huit nombres qui restent, & les complémens au dessous, comme on voit icy.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103	
34	3
28	9
27	10
14	23

Puis j'écris à part la somme que doivent faire ensemble les quatre nombres de chacune des deux lignes, sçavoir 103 & 68, & je cherche quatre nombres qui fassent l'un de ces nombres, par éxemple 103; mais afin de voir si on peut trouver quatre nombres qui fassent 103, & quatre autres qui fassent 68, il faut faire toutes les combinaisons possibles. Premiérement, je prendray 34 & 32, qui ensemble font 66, & pour aller jusques à 103, il faut encore 37 pour deux nombres. Mais on ne peut trouver deux nombres qui fassent 37, s'ils ne sont complémens l'un de l'autre. Or il ne faut jamais mettre en une mesme ligne deux nombres qui soient les complémens l'un de de l'autre, parce

parce que le complément de chaque nombre se doit mettre en la ligne opposée, ce qu'il faut entendre pour cette méthode seulement; car il y a diverses voyes par lesquelles on pourra bien faire, que deux nombres qui soient les complémens l'un de l'autre, se trouvent en mesme ligne.

Puis donc que 32 ne peut estre avec 34, je prens le nombre suivant 28, qui avec 34 fait 62; & parce que la ligne doit avoir 103, les deux autres nombres doivent faire ensemble 41. Je prens donc le nombre qui suit 28, sçavoir 27 qui avec 14 fait 41. Voilà pour la ligne A B.

Je viens maintenant à la ligne B C, qui doit avoir 68 en ses quatre nombres, qui doivent estre mis entre les coins B & C, & les quatre nombres qui restent sont, 32 26 25 21
& leurs complémens qui sont au dessous, 5 11 12 16

Je prens premiérement 32, lequel étant joint à 26 donnera 58, & parce que la ligne doit avoir 68, il ne reste plus que 10 qu'il faudroit faire avec deux nombres, ce qui ne se peut avec les quatre nombres restans, 25, 21, 16, 12.

Si on joint 32 à 25, ou mesme à 21, on tombera en mesme inconvénient, car 32 & 21 font 53, qui ostez de 68 reste 15, qu'il faut faire en deux nombres; mais il ne reste plus que 12 & 11 qui font plus de 15.

Si on joint 32 à 16, on aura 48, qui ostez de 68 restera 20, qui ne se peuvent faire par 11 & 12.

On ne sçauroit passer plus outre, parce que si on joignoit 12 à 32, on seroit contraint de mettre aussi en mesme ligne que 32 quelqu'un des nombres précédens, ce que néantmoins on a reconnu estre impossible.

Il faut donc prendre un autre nombre que 32, puisqu'il ne peut estre en la ligne BC, & ce sera le nombre suivant 26, qui estant joint à 25 fait 51, qui ostez de 68, reste 17, qu'il faut faire avec deux nombres pris dans les trois qui restent, qui

 sont

ſont 21, 16, 5, car 32 en a déja eſté exclus. Mais 17 ne ſe peut faire avec ces nombres.

On joindra aprés 26 à 21 : la ſomme eſt 47, qui eſtans oſtée de 68, reſte 21, qu'il faudroit faire avec les deux nombres qui reſtent 12 & 5; mais parce qu'ils ſont trop petits pour cet effet, il ne faut point paſſer outre, car ce ſeroit encore pis, ſi on joignoit 26 à 16, ou 25 à 21.

Puis donc que cette ſeconde ligne B C ne ſe peut faire, il faut changer la premiére ligne A B.

Mais afin de n'omettre aucune façon par laquelle on la puiſſe faire, (car ſi on en laiſſoit quelqu'une ce pourroit eſtre celle dont on auroit beſoin) il faut continuer par le meſme ordre qu'on a commencé.

On avoit pris 34 & 28 pour les deux premiers nombres, & il reſtoit 41 à faire en deux nombres pour aller juſques à 103.

Pour faire ces 41 on avoit pris 27 & 14, leſquels n'ayans pas bien réuſſi, je cherche ſi on peut faire les meſmes 41 avec deux autres nombres, & je trouve 25 & 16.

Il reſtera donc pour la ſeconde ligne les quatre	32	27	26	23
nombres, & leurs complémens	5	10	11	14

Si on éxamine ces nombres comme cy-devant, on trouvera qu'on ne peut en choſir quatre d'entr'eux, qui enſemble faſſent 68, pourveû qu'il n'y en ait point deux qui ſoient complémens l'un de l'autre, car on pourroit bien prendre 27, 26, 10, 5, qui enſemble font 68; mais parce que 27 & 10 ſont complémens l'un de l'autre, on ne pourroit avec eux parfaire la figure, comme il a eſté dit.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103	
34	3
28	9
25	12
16	21

On

On ne peut donc pas faire la premiére ligne avec les quatre nombres 34, 28, 25, 16; & parce qu'on ne peut plus faire 41 avec deux autres nombres, (puiſque 23 & 21 qui reſtent à conſidérer font plus de 41) il faut changer 28, & mettre avec 34 le ſuivant 27.

On aura donc 34 & 27, dont la ſomme eſt 61, qui oſtée de 103, reſte 42, qu'il faut trouver en deux nombres, tous deux moindres que 27, car ſi l'un des deux nombres eſtoit plus grand que 27, & ſi c'eſtoit par éxemple 28 & 14, ce ſeroit refaire la meſme choſe qu'on a cy-devant conſidérée & trouvée impoſſible, car on auroit les quatre meſmes nombres qu'on a eus auparavant, ſçavoir 34, 28, 27, 14.

Or les 42 qui reſtent ne ſe peuvent faire que par 26 & 16, car 25 & 21, ou 23 & 21 qui reſtent, ſont trop grands.

On aura donc 34, 27, 26, 16 pour la premiére ligne A B.

Pour la ſéconde B C, qui doit avoir 68, je prens premiérement 32 & 28, qui enſemble font 60; mais parce qu'il faudroit faire 8 en deux nombres, il en faut mettre un autre avec 32, & afin de les avoir ſéparez de ceux de la premiére ligne, je les écriray à part avec leurs complémens.

103		68	
34	3	28	9
27	10	23	14
26	11	12	25
16	21	5	32

32	28	25	23
5	9	12	14

Je joindray donc 32 à 25, la ſomme eſt 57, qui oſtée de 68, reſte 11, qu'on ne peut faire en deux nombres, puiſque les deux moindres qui reſtent, ſçavoir 9 & 14, font plus de 11.

On aſſemblera aprés 32 & 23, la ſomme eſt 55, qui oſtée de 68, reſte 13; mais 9 & 12 qui reſtent font plus de 13.

 En-

Enfin on ajoûtera 32 à 14, la somme est 46, qui ostée de 68, reste 22; mais 12 & 9 qui restent ne font que 21, & ainsi on ne peut mettre 32 en cette ligne B C, puisque parcourant tous les nombres avec 32, on ne peut trouver 68.

Il faut donc changer 32, & prendre le nombre suivant qui est 28, lequel estant joint avec 25 fait 53, qui estans ostez de 68, reste 15, qu'on ne peut faire avec les nombres suivans, puisque les deux moindres 5 & 14 font plus de 15.

Aprés on ajoûtera 28 à 23: la somme est 51, qui ostée de 68, reste de 17, qui se fait avec les deux nombres qui restent, sçavoir avec 12 & 5.

On aura donc par ce moyen la table parfaite, car la premiére ligne A B sera 34, 27, 26, 16, prés desquels nombres je mets leurs complémens 3, 10, 11, 21, qui doivent faire la ligne D C de la figure qui est cy-devant à la page 249, & qui est opposée à A B, & on mettra les nombres & les complémens vis-à-vis l'un de l'autre, comme on voit en la figure, en laquelle 3 est vis-à-vis de 34, 10 vis-à-vis de 27, & ainsi des autres.

La ligne BC se fera des nombres 28, 23, 12, 5, & la ligne AD qui luy est opposée se fera des complémens de ces nombres, sçavoir de 9, 14, 25, 32, qu'on voit à la page precedente vis-à-vis de 28, 23, 12, 5, & les autres, sçavoir 9, 14, 25, 32 se doivent mettre aussi chacun vis-à-vis de leurs complémens, sçavoir 9 vis-à-vis de 28, 14 vis-à-vis de 23, &c.

On peut passer outre à éxaminer si on ne peut point faire cette table de 6 d'une autre façon, les coins demeurans comme ils sont, & en leur mesme situation.

Premiérement, il est bien certain que la ligne AB demeurant telle qu'elle est, on ne peut pas faire la ligne BC d'une autre sorte, parce que si au lieu de 28 & 23, on prenoit 28 & 14, ou 15 & 23, les nombres qui resteroient ne seroient pas suffisans d'achever 68, parce que nécéssairement ils seroient moindres que ceux qui restent lors qu'on prend 28 & 23.

3 5 9 10 11 12 14 16
34 32 28 27 26 25 23 21

103		68	
34	3	28	9
25	12	23	14
23	14	12	25
21	16	5	32

Il faut donc changer la ligne AB, dont les quatre nombres qui ſont entre les coins 1 & 7, doivent faire enſemble 103.

Et parce que l'on a déja pris 34 & 27, & qu'on ne peut faire les 42 qui reſtent par d'autres nombres que par 26 & 16, qui ont déja eſté employez, il faut changer 27, & prendre 26 avec 34, qui enſemble font 60, qui oſtez de 103, reſte 43, qu'on ne peut faire avec deux des nombres qui reſtent, & qui ſoient moindres que 26.

Il faut donc paſſer plus outre, & joindre 25 à 34, dont la ſomme eſt 59, qui oſtée de 103, reſte 44 qui ſe peuvent faire avec 23 & 21. La ligne AB ſera donc 34, 25, 23, 21.

Et il faudra faire 68 en quatre nombres pour la ligne BC, avec les quatre qui reſtent, 5 9 10 11
& leurs complémens, qui ſont 32 28 27 26

Mais on ne ſçauroit trouver quatre de ces nombres ſelon la régle, qui eſt de ne point mettre un nombre & ſon complément en meſme ligne, qui faſſent 68, d'où s'enſuit que la ligne AB ne peut pas eſtre compoſée de 34, 25, 23, 21.

Si on veut paſſer outre, on ne pourra plus ajoûter aucun nombre avec 34, car on ne feroit que des répétitions de ce qui a eſté déja examiné : car ſi aprés 25 il faut prendre les deux plus grands nombres qui reſtent, ſçavoir 23 & 21; ſi on mettoit 23 avec 34, on ne pourroit pas trouver deux nombres moindres que 23, qui fiſſent enſemble ce qu'il faudroit de reſte pour achever 103, ainſi qu'il eſt réquis.

Il

Il faut donc abandonner 34, & se servir de 32, en le comparant aux nombres suivans, comme on a fait 34.

Je joins 32 à 28: la somme est 60, qui ostée de 103, reste 43, qu'on peut faire avec 27 & 16 seulement.

La ligne A B aura donc 32, 28, 27, 16, pour les quatre nombres qui sont entre ses coins 1, 7.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103		68
32	5	
28	9	
27	10	
16	21	

Pour faire la ligne B C, qui doit estre de 68, sans les coins, on se servira des nombres restans, qui sont 34 26 25 23
3 11 12 14

Si on prend 34 & 26, on aura 60, restera 8 qu'on ne peut pas faire en deux nombres; & le mesme inconvénient arrive à 34 & 25, comme aussi à 34 & 23, qui ensemble font 57, qui ostez de 68, reste 11, qu'on ne sçauroit faire avec 11 & 12.

Pareillement si on se sert de 34 & 14, la somme est 48, qui ostée de 68, reste 20, qui est encore moindre que la somme de 11 & 12 qui restent.

Il faut donc laisser 34, & se servir de 26, qui estant joint à 25, fait 51, qui osté de 68, reste 17, qui se peut faire avec 14 & 3.

La séconde ligne BC sera donc de 26, 25, 14, 3.

103		68	
32	5	26	11
28	9	25	12
27	10	14	23
16	21	3	34

On disposera la premiére ligne au dessous de 103, & les complémens à costé, & de mesme la séconde ligne au dessous de 68, afin de les disposer aprés en leur place en ce mesme ordre pour avoir la figure suivante, en laquelle la figure intérieure de 4 de costé est la mesme que cy-devant. Si

Si on vouloit passer outre à la récherche d'autres figures, il faudroit joindre 32 à 25 : la somme est 59, qui ostée de 103, reste 44, qu'on fera en prenant 23 & 21, & ainsi on auroit pour la premiére ligne 32, 27, 23, 21, mais on ne pourra composer la séconde; de sorte qu'il faut changer la premiére.

A B

1	32	28	27	16	7
11	2	33	31	8	26
12	24	15	17	18	25
23	19	20	22	13	14
34	29	6	4	35	3
30	5	9	10	21	36

D C

Si on joint 32 à 26 ou à 25, on ne pourra faire 103, c'est pourquoy il faut laisser 32, & considérer 28, qui estant joint à 27, donne 55, qui ostez de 103, reste 48, qui seront faits par 25 & 23. On aura donc pour la premiére ligne 28, 27, 25, 23, mais on ne pourra faire la séconde ligne qui doit estre de 68, avec les nombres qui restent.

Il faudroit donc réformer encore la premiére ligne, ce qui ne se peut, parce qu'ayant pris les quatre nombres 28, 27, 25, 23, si l'on change quelqu'un des deux premiers 28 & 27, on ne pourra prendre que 26 au lieu de l'un d'eux; mais il faudroit en mesme temps augmenter 23 ou 25, ce qui ne se peut, parce qu'entre les nombres qu'on peut choisir, & dont on se peut servir, il n'y a que le mesme 26 qui soit plus grand qu'eux.

Il est donc manifeste, que laissant la table intérieure de 4 en l'état qu'elle est, & les coins 1 & 7, avec leurs complémens, on ne peut faire que les deux tables de 6 cy-devant écrites, qui sont mar-

quées A B C D, si ce n'est que l'on veüille considérer l'ordre des nombres, chacun demeurant dans la mesme ligne sans en sortir; mais il sera parlé cy-aprés de cette variation.

Que si on vouloit réchercher plus outre, il faudroit mettre un autre nombre que 7 à l'un des angles, & les ayant tous éprouvez à cet angle, on changeroit aussi l'angle où l'on a mis 1, mettant à la place le nombre suivant qui est 3, & son complément 34 à l'angle opposé; & à l'autre angle qui borne la mesme ligne, on mettroit le nombre suivant 5, puis 7, & les autres.

Exemple d'une table de 8.

Il faut maintenant donner l'éxemple de la fabrique d'une autre table, sur laquelle on se puisse conduire, pour en former d'autres plus grandes, qui sera celle qui a 8 à chacun de ses costez.

J'arrange premiérement la moitié des nombres de suite, sçavoir jusques à 32, & leurs complémens au dessous, & chaque couple de nombres fera 65, sçavoir autant que les deux extrèmes ensemble 64 & 1, & ce 65 est la valeur que doivent avoir deux nombres l'un portant l'autre en chaque ligne; & ainsi le premier quarré qui est de 4 aura deux fois 65, qui font 130; le sécond qui a six nombres aura 195, sçavoir trois fois 65; & le dernier qui est l'enceinte extérieure, & qui a huit nombres en chaque ligne, contiendra 260.

Voicy donc les nombres de suite ainsi qu'il les faut ranger.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Ayant ainsi disposé les nombres, je prens les huit premiers & leurs

leurs complémens, sçavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, desquels je fais, comme il a esté montré cy-devant, la table suivante de 4.

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

Aprés je prens les dix nombres suivans, & leurs complémens, pour l'enceinte suivante, qui sera le quarré ou table de 6. Ces nombres sont,

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

Avec ces nombres on fera la derniére enceinte de la table de 6, par quelqu'une des façons cy-devant déduites.

Ou bien on prendra une des tables de 6 qui sont cy-devant; par éxemple, la premiére qui est en la page 240, qui est répétée icy.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Ayant cette table, je remarque où sont les 18 premiers & moindres nombres qui sont la moitié des nombres de la table, & les laisse en leurs places ; mais au lieu des 18 autres, je mets les complémens pris sur le quarré 64, comme on les a mis cy-devant : mais afin de ne se point troubler, on pourra écrire les nombres de la table de 6, & leurs complémens au dessous pris sur 36, & au dessous de ceux-là les complémens pris sur 64, comme on voit icy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

La premiére ligne contient les nombres qui appartiennent à chacune des deux tables, tant à celle qu'on prend pour patron, que celle qui fait partie de la table de 8.

La séconde ligne appartient à la table de 6, qui est cy-dessus, & qui sert de patron, & contient les complémens de la premiére ligne, & chaque couple de nombres fait 37.

La troisiéme contient les complémens de la premiére ligne, & appartient à la table de 6, qui fait partie de celle de 8, & chaque couple de nombres fait 65.

Cela fait, il faut mettre à part le reste des nombres jusques à 32, & leurs complémens au dessous, comme on voit icy.

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Aprés on prendra pour les coins de la derniére enceinte les moindres nombres 19 & 20, & leurs complémens 46, 45 : ce n'est pas pourtant qu'on ne puisse prendre d'autres nombres que 19 & 20, car cela est visible, veu que la figure se peut faire en beaucoup de façons

Main-

Maintenant je feray facilement la table de 6 sur la précédente, laissant les nombres de la premiére ligne au lieu où on les trouvéra, & mettant ceux de la troisiéme ligne à la place de ceux de la séconde; & ainsi on aura la figure suivante.

19							20
	9	53	54	51	18	10	
	16	1	63	62	4	49	
	48	60	6	7	57	17	
	52	8	58	59	5	13	
	15	61	3	2	64	50	
	55	12	11	14	47	56	
45							46

J'assemble 19 & 20, la somme est 39, que j'oste de 260, qui est la somme que doivent faire les nombres de chaque ligne, reste 221 pour les six nombres, qu'il faut mettre entre 19 & 20.

Pareillement j'assemble 20 & 46, la somme est 66, qui ostez de 260, reste 194 pour les six nombres qui doivent estre entre 20 & 46. On peut voir aussi quelle doit estre la somme des six nombres, qui seront entre 19 & 45, & cette somme sera 196, afin que si on trouvoit 196 avant 194, on s'en pust servir.

Je fais premiérement la ligne 19, 20, & parce que 19, 20 sont les moindres nombres des coins, je prens des plus grands nombres qui restent pour suppléer à leur défaut. Je considéreray donc les quatre plus grands, 44, 43, 42, 41, dont la somme est de 170: & parce que les six nombres doivent valoir ensemble 221, il reste 51 pour les deux nombres qui sont encore à trouver. On prendra donc 25 & 26, qui ensemble font 51: cette premiére ligne sera donc 44, 43, 42, 41, 26, 25, entre les coins 19 & 20.

Reste

Reste à trouver les six nombres qu'il faut à la ligne qui a 20 & 46 à ses extrémitez, lesquels six nombres doivent faire ensemble 194, & les six nombres de la ligne opposée, dont les extrémitez sont 19, 45, doivent faire ensemble 196, lesquels nombres on doit choisir parmi les suivans,

27	28	29	30	31	32
38	37	36	35	34	33

Je divise 194 par six, pour voir ce que doivent avoir les nombres l'un portant l'autre : je trouve 32, & reste 2; d'où s'ensuit que les nombres pris deux à deux doivent faire 64, mais l'un des couples doit faire 66, ainsi on aura deux couples de nombres de 64 chacun, & un couple de 66, qui font les six nombres, car on ne peut pas faire deux couples de 65 par éxemple, & un de 64, parce qu'il est impossible de faire 65 en deux nombres, si on ne prend les deux, qui sont complémens l'un de l'autre; ce qui est directement contre la principale & générale régle, qui est,

Que jamais dans la construction qu'on donne icy, on ne doit mettre en mesme ligne deux nombres qui soient complémens l'un de l'autre, c'est à dire qui estans joints ensemble fassent autant que les deux extrémes ensemble, qui sont icy 64 & 1.

On cherchera donc deux couples de nombres qui fassent 64, & un couple qui fasse 66, on aura 33, 31; 35, 29, & 38, 28. Les 37 & 27 font 64; mais parce qu'un des couples doit avoir deux de plus, on prend 38 au lieu de 37, & 28 au lieu de 27.

Les six nombres seront donc 28, 29, 31, 33, 35, 38, qu'il faut mettre entre 20, 46, & les six autres qu'il faut mettre en la ligne opposée, entre 19, 45 sont leurs complémens, sçavoir 37, 36, 34, 32, 30, 27, qui seront disposez selon cet ordre, en telle sorte que les complémens soient toûjours vis-à-vis l'un de l'autre; & ainsi on aura la figure suivante.

19	44	43	42	41	26	25	20
37	9	53	54	51	18	10	28
36	16	1	63	62	4	49	29
34	48	60	6	7	57	17	31
32	52	8	58	59	5	13	33
30	15	61	3	2	64	50	35
27	55	12	11	14	47	56	38
45	21	22	23	24	39	40	46

On pourra encore faire ces lignes d'une autre ſorte ; ſçavoir, prenant 34, 32 pour le couple qui doit faire 66, & 35, 29 ; 37, 27 pour les deux autres ; & ainſi les ſix nombres qu'il faudroit mettre entre 20 & 46, ſeroient 27, 29, 32, 34, 35, 37.

Et les ſix autres qui doivent eſtre mis entre 19, 45, ſeroient leurs complémens ; ſçavoir, 38, 36, 33, 31, 30, 28, avec leſquels on aura une autre figure.

20 27 29 32 34 35 37 46 à la place de 20 28 29 31 33 35 38 46
& 19 38 36 33 31 30 28 45 à la place de 19 37 36 34 32 30 27 45

On pourroit encore faire 194 par d'autres couples, prenant 30 & 36 pour faire 66, & les deux autres couples de 64, qui ſeront 27, 37, & 31, 33, & les ſix nombres qu'on mettra entre 20 & 46, ſeront 27, 30, 31, 33, 36, 37 ; & entre 19, 45 on mettra leurs complémens 38, 35, 34, 32, 29, 28.

On ſe peut encore ſervir d'autres maniéres pour trouver 194, ou 196, ſans conſidérer ni prendre les couples des nombres, ainſi qu'on a fait pour la derniére enceinte des précédentes figures de

de six; ce qui seroit trop long à répéter icy, veû mesme qu'on en donnera des éxemples, & qu'on s'en servira en quelqu'une des lignes de la figure suivante.

Exemple d'une table de 14.

AFIN qu'on puisse voir toutes les façons de choisir les nombres pour remplir les lignes des enceintes diverses de la figure, on donnera encore l'éxemple d'une table de 14.

Et parce qu'en cette méthode-cy il n'y a que trois façons de ranger les nombres, on prendra le quarré de 8, (considéré comme faisant partie du quarré de 14) sur le modéle du quarré précédent de 8, & en suite l'enceinte de 10 se fera d'une façon, celle de 12 d'une autre, & l'enceinte extérieure, qui est celle de 14, encore d'une autre.

Je mets donc premiérement de suite les nombres qui doivent remplir les 196 places du quarré, & les dispose en deux lignes; sçavoir la moitié dans une des lignes, & l'autre moitié qui sert de complément à la premiére, dans l'autre ligne au dessous de la premiére, en telle sorte que chaque couple de nombre fasse 197, qui est la somme des deux nombres extrémes, comme on voit cy-dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
185	184	183	182	181	180	179	178	177	176	175
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
174	173	172	171	170	169	168	167	166	165	164
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
163	162	161	160	159	158	157	156	155	154	153

45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
152	151	150	149	148	147	146	145	144	143	142
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
141	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
130	129	128	127	126	125	124	123	122	121	120
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	
108	107	106	105	104	103	102	101	100	99	

Ces nombres eſtant ainſi diſpoſez, je prens les 32 premiers, & leurs complémens, pour faire le quarré intérieur de 8 en la meſme façon qu'on a fait le précédent de 8, ou ſi on veut on le fera ſur ſon modéle, laiſſant les 32 premiers nombres en la meſme place qu'ils ſont au précédent; mais pour les nombres qui ſurpaſſent 32, il les faudra changer aux complémens correſpondans pris ſur 196; & afin que cela ſe puiſſe faire plus aiſément & ſans eſtre en danger de prendre un nombre pour un autre, on écrira les 64 nombres de la précédente table de 8 en deux lignes, qui ſerviront de complément l'une à l'autre; & au deſſous de cette ſéconde, on en mettra une troiſiéme qui contiendra les 32 premiers complémens de la page précédente, ſçavoir depuis 196 juſques à 165, qui eſt deſſous 32.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43
185	184	183	182	181	180	179	178	177	176	175

23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
42	41	40	39	38	37	36	35	34	33
174	173	172	171	170	169	168	167	166	165

Et laissant les nombres de la premiére ligne en mesme place dans la figure B, qu'on la voit dans la figure A, on mettra dans la figure B ceux de la troisiéme ligne, aux mesmes places que ceux de la séconde ligne sont dans la figure suivante A, comme l'on voit icy.

A

19	44	43	42	41	26	25	20
38	9	53	54	51	18	10	27
36	16	1	63	62	4	49	29
33	48	60	6	7	57	17	32
31	52	8	58	59	5	13	34
30	15	61	3	2	64	50	35
28	55	12	11	14	47	56	37
45	21	22	23	24	39	40	46

B

19	176	175	174	173	26	25	20
170	9	185	186	183	18	10	27
168	16	1	195	194	4	181	29
165	180	192	6	7	189	17	32
31	184	8	190	191	5	13	166
30	15	193	3	2	196	182	167
28	187	12	11	14	179	188	169
177	21	22	23	24	171	172	178

Pour avoir plus de facilité à faire ces tables, il faut mêler les nombres le moins qu'on peut, c'est à dire les prendre de suite autant que faire se pourra. Par éxemple, le plus grand d'entre les moindres nombres de la table précédente B, est 32; or on appelle les moindres nombres ceux de la premiére ligne, sçavoir depuis 1, jusques à 98; & les grands nombres, ceux de la séconde ligne qui sont les complémens des premiers, depuis 99, jusques à 196 inclusivement.

Je

Je prens donc 33 & 34, & leurs complémens, pour les angles de la figure de 10, qui entoure la précédente de 8; & parce qu'entre les angles de chaque ligne de l'enceinte de 10, il y a huit nombres, je prens les seize nombres qui suivent 34, & leurs complémens, pour deux lignes prochaines, & qui font un des angles de la figure, & pour les deux autres lignes qui leur sont opposées. Ces nombres sont,

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147

Je prens aprés les deux nombres suivans 51 & 52, & leurs complémens, pour les angles de la suivante enceinte de 12, & les vingt nombres suivans, & leurs complémens pour les lignes.

Enfin on prendra le reste des nombres pour la derniére enceinte: ce n'est pas qu'il faille nécessairement suivre cet ordre; car on peut entremêler les nombres comme on veut, & en prendre au commencement, au milieu, & à la fin pour une mesme ligne: mais on trouvéra plus de facilité en suivant l'ordre précédent.

Or voicy les trois voyes dont on se pourra servir pour parfaire les lignes, aprés que les coins sont remplis; mais avant tout, il faut observer ce qui est commun à toutes ces voyes, & ce qui se doit pratiquer auparavant.

Je suppose donc premiérement, que les nombres soient aux angles de la figure, & leurs complémens aux angles opposez, comme on voit icy, où 164 complément de 33, est opposé à 33, & 163 complément de 34, est opposé à 34.

33	34
163	164

Cela fait, je considére ce que tous les dix nombres de l'enceinte doivent faire ensemble; & pour trouver cette somme, on remarquera que deux nombres l'un portant l'autre doivent faire 197, & cela doit estre dans toutes les lignes de chaque enceinte, lequel 197 est la somme de 196 & 1, qui

qui sont les deux extrémes de tous les nombres qui composent la figure de 14.

Or si chaque couple de nombres doit faire 197, les dix nombres, qui sont cinq couples, feront 985, sçavoir cinq fois 197. Puis donc que chaque ligne doit avoir 985, pour sçavoir quelle somme doivent faire les huit nombres qu'il faut mettre entre 33 & 34, il faut oster de 985 la somme de 33 & 34, qui est 67, & il restera 918 pour les huit nombres.

Semblablement j'oste de 985 la somme de 34 & 164, qui est 198, restera 787 pour les huit nombres qu'il faut mettre entre 34 & 164; & cette opération doit estre faite à chaque enceinte aprés que les angles sont posez.

Pour les deux lignes opposées, sçavoir 163, 164, ou 33, 163, il ne s'en faut pas mettre en peine; car leurs opposées estant faites, nécéssairement elles le seront aussi en y mettant les complémens de leurs opposées. Il est vray que pour l'opération précédente, qui sert à trouver combien les nombres qu'on doit mettre entre les angles doivent faire ensemble, on se peut servir de deux telles lignes qu'on voudra, pourveû qu'elles ne soient pas opposées l'une à l'autre. Par éxemple, au lieu d'oster de 985 la somme de 33 & 34, on pourroit oster la somme de 163 & 164; & au lieu de la somme de 34 & 164, on pourroit prendre celle de 33 & 163, car cela est indifférent.

La premiére méthode de trouver les nombres de chaque ligne, sert pour avoir toutes les façons possibles de faire & remplir la ligne avec les nombres donnez; & à cause que par cette méthode on compare chaque nombre avec tous les autres, il s'ensuit qu'on ne s'en doit pas servir lorsqu'il y a beaucoup de nombres en la ligne, parce que cela seroit trop long, mais on s'en servira utilement lorsqu'il y a peu de nombres; c'est pourquoy nous la prendrons icy pour remplir les lignes de l'enceinte de 10, en chacune desquelles lignes il y a huit nombres, sans les coins qui sont 33, 34, & leurs complémens 164, 163.

Les

Les huit nombres d'une des lignes, ſçavoir de celle qui eſt entre 34 & 33, doivent faire enſemble 918, qu'il faut mettre à part au deſſous de 34, 33, & les nombres qui doivent eſtre mis entre 34 & 164 feront enſemble 787, que je mets auſſi à part afin de ne rien confondre.

34	33	34	164
918		787	

Les nombres des deux lignes, & leurs complémens, ſont

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147
|	|	|	|	|	|	|		|							

Pour faire 918, parce que le nombre eſt grand, & qu'il doit récompenſer la petiteſſe de 34, 33, je prens les quatre plus grands nombres, ſçavoir 162, 161, 160, 159, qui enſemble font 642, qui oſtez de 918, reſtera 276 pour les quatre nombres reſtans. Pour faire 276, je ne puis pas me ſervir des deux nombres ſuivans 158, 157, parce qu'ils feroient plus de 276, ni meſme des deux moindres de la ſeconde ligne, ſçavoir de 148, 147, parce qu'ils font auſſi plus de 276. Mais ſi on prenoit les quatre plus grands de la premiére ligne, ſçavoir 47, 48, 49, 50, la ſomme ſeroit moindre que 276, c'eſt pourquoy il faudra prendre un des nombres de la ſéconde ligne, & trois de la premiére. Prenons par éxemple 158, reſtera 118, mais 118 ne ſe peut faire avec trois nombres de cette ligne; car les trois moindres ſont 40, 41, 42, qui enſemble font 123, qui eſt 5 plus que 118.

Il faut donc diminuer 158. Je prens 155 au lieu de luy, qui oſtez de 276, reſtera 121 qu'il faut faire en trois nombres; ce qui ne ſe peut point encore, non plus qu'avec 157 & 156; mais prenant 154, il reſtera 122, qui ſe feront avec 39, 41, 42.

Et ainsi on pourra éprouver à faire la ligne, en prenant 153, 152, & les autres.

Et pour continuer la recherche des différentes sortes de lignes qu'on peut faire avec les seize nombres, & leurs complémens, je change le dernier des quatre nombres premiérement pris, & mets 158 au lieu 159, & j'auray 162, 161, 160, 158, qui ensemble font 641, qui ostez de 918, reste 277, qu'il faut faire avec quatre nombres, desquels on a reconnu cy-devant que l'un devoit estre de la séconde ligne, & les trois autres de la premiére.

Je prens donc 157, qui ostez de 277, reste 120, qu'on ne sçauroit faire avec trois nombres; car si on prend les trois moindres 38, 41, 42, on aura 121. Il faut donc diminuer 157, & prendre 156, qui ostez de 277, restera 121, qu'on fera avec trois nombres, sçavoir avec 38, 40 43.

On pourroit continuer cette recherche prenant un autre nombre que 156, puis diminuant encore 158, & revenant aprés à faire la mesme chose à 160, 161, & enfin à 162. Ce qui seroit trop long à déduire.

La premiére ligne entre 33 & 34, sera donc 162, 161, 160, 158, 156, 38, 40, 43.

Pour la séconde ligne qui est entre 34 & 164, & dont les huit nombres doivent faire ensemble 787, je cherche à la faire comme s'ensuit, avec les nombres qui restent; sçavoir,

42	44	45	46	47	48	49	50
155	153	152	151	150	149	148	147

Parce que la somme des angles 34 & 164 est 198, qui ne différe que de l'unité de 197, qui est la somme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faudra prendre quatre nombres de la ligne inférieure, & quatre de la supérieure, à telle condition toutefois qu'on prenne une quotité impaire de nombres impairs,

pairs, afin que la somme soit impaire, comme est 787. Je prendray donc par exemple 155, 153, 152, 150: la somme est 610, qui ostée de 787, reste 177, qu'on ne peut pas faire avec quatre nombres, car les quatre qui restent sont 46, 48, 49, 50, qui ensemble font 193: & si je prens 147 au lieu de 150, la somme sera encore trop petite,

Et parce que la différence de 193 à 177 est grande, je diminuë tout à coup 152 de beaucoup, & sans s'amuser à prendre 151, ou 150, l'on prendra d'abord les quatre nombres 155, 153, 148, 147, dont la somme est 603, qui ostée de 787, reste 184; mais les quatre nombres qui restent, sçavoir 45, 46, 47, 48, font 186. Ils seront donc trop grands de 2, & ainsi il faudra diminuer 153. Je prens 152 en sa place, & laisse 148 & 147, puisque 153 n'est diminué que de 1.

On aura donc 155, 152, 148, 147, dont la somme est 602, qui ostée de 787, reste 185: les quatre nombres qui restent sont 44, 46, 47, 48, dont la somme est 185, ainsi qu'il est réquis. On a donc les nombres qui doivent estre entre 34 & 164, qui seront 155, 152, 148, 147, 44, 46, 47, 48.

Mais si on vouloit chercher plus outre, on diminueroit encore 152, prenant d'autres nombres que 148 & 147.

Et enfin on diminuëroit le premier nombre 155, prenant 153 en sa place, & cherchant comme devant, on trouvéra que les huit nombres suivans, 153, 152, 150, 147, 49, 48, 46, 42 estant joints ensemble, font 787.

Je mets donc au dessous de 918, les nombres de la ligne 34, 33, cy-devant trouvez; & au dessous de 787, ceux de la ligne 34, 164, & leurs complémens a costé, comme on voit à la page suivante.

34	918	33		34	787	164
162		35		153		44
161		36		152		45
160		37		150		47
158		39		147		50
156		41		49		148
43		154		48		149
40		157		46		151
38		159		42		155

Ces nombres eſtant ainſi diſpoſez, je les range à l'entour de la figure de 8 marquée B en la page 266, entre leurs angles qui ſont marquez au deſſus d'iceux, & en fais la figure ſuivante de 10.

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151
42	177	21	22	23	24	171	172	178	155
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163

Mais cette méthode eſt trop longue, quoy qu'elle ſoit de grande commodité aux petites figures, comme de ſix ou huit nombres à chaque coſté : toutefois on pourroit choiſir tels nombres

bres

bres pour les angles & pour les lignes qu'on ſe trouveroit ſi embaraſſé, qu'on ſeroit obligé de recourir à cette voye, ſi on ne vouloit point changer les nombres; & c'eſt icy le dernier refuge: car puiſque par cette méthode on trouve toutes les façons de faire les lignes avec les nombres donnez, ſi on la met en pratique, néceſſairement elle découvrira, (ſi on la ſuit de point en point & ſans rien omettre) ſi la ligne ſe peut parfaire avec les nombres dont on ſe veut ſervir.

Il la faudroit auſſi néceſſairement mettre en uſage, ſi on vouloit avoir toutes les façons poſſibles de faire une table ſans changer les nombres de chaque enceinte.

Maintenant il faut paſſer aux deux autres voyes, par l'une deſquelles on fera l'enceinte de 12, & par l'autre la derniére qui eſt de 14.

Il faut premiérement ſçavoir combien chaque ligne doit avoir en l'enceinte de 12; ce qui ſe fait multipliant 197 par 6, le produit ſera 1182, car puiſque chaque couple de nombres, l'un portant l'autre, doit faire 197, les ſix couples, qui ſont douze nombres, feront 1182.

Je choiſis aprés les deux nombres qu'il faut mettre aux angles; on a pris pour la table précédente tous les nombres juſques à 50, & leurs complémens; on prendra pour ces deux angles icy les deux nombres ſuivans, ſçavoir 51, 52, & leurs complémens 146, 145, qui ſeront diſpoſez aux angles de la figure, comme on voit icy.

51	52
145	146

J'aſſemble aprés 51 & 52, la ſomme eſt 103, qui oſtée de 1182, qui eſt la ſomme des douze nombres de la ligne, reſte 1079 pour les dix nombres qui reſtent à mettre entre 51 & 52.

Pareillement j'aſſemble 51 & 145, la ſomme eſt 196, qui oſtée de 1182, reſte 986 pour les dix nombre qui doivent eſtre entre 51 & 145.

Cela fait, je prens les vingt nombres qui suivent 52, & leurs complémens, car il en faut dix en chacune des lignes entre les angles.

51 52 51 145
1079 986

53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63
144 143 142 141 140 139 138 137 136 135 134

64 65 66 67 68 69 70 71 72
133 132 131 130 129 128 127 126 125

Séconde méthode. Pour cette enceinte on se servira de la séconde méthode qui est la plus facile de toutes, & se fait comme s'ensuit.

Je divise 1079 par 10, à cause que les dix nombres doivent faire 1079; tous ensemble on aura 108 moins 1; de sorte que neuf des nombres vaudront 108, & le dixiéme vaudra 107: (ce qui se doit entendre l'un portant l'autre) chaque couple de nombres vaudra donc 216, excepté une qui ne vaudra que 215.

Mais parce qu'il n'y a que deux nombres qui puissent faire 216, sçavoir 144 & 72, il faudra prendre quelques-uns des plus grands nombres, afin que les autres en soient d'autant diminuez. Par éxemple, on prendra 144 & 143, dont la somme est 287, qui ostée de 1079, reste 792, qui divisé par 8, à cause des huit nombres qui restent, on aura 99: chaque couple de nombres vaudra donc 198, & il y a quatre couples.

On observera de faire en sorte que les nombres qui resteront pour l'autre ligne, soient de suite le plus qu'on pourra, car on y trouvera plus de facilité.

On fera aisément 198 plusieurs fois, & tant qu'on voudra, comme si on prend 142, 56, | 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62.|

Mais

Mais on le peut encore trouver d'une autre sorte, prenant des couples de nombres qui vaillent plus de 198, & d'autres qui vaillent d'autant moins, car il arrive par fois qu'on ne peut trouver deux nombres qui fassent ce qui est réquis.

Si donc je ne pouvois faire 198 en deux nombres, j'en prendrois deux qui fassent par éxemple 188, sçavoir 125 & 63, & en échange il en faudroit prendre deux qui fissent ensemble 208, comme 142, 66.

Le premier couple vaut 10 moins que 198, & le second vaut 10 plus : je prendray aprés 126, 64, qui font ensemble 190, qui est huit moins que 198; & en échange je prendray 141, 65, dont la somme est 206, qui surpasse 198 de huit.

On aura donc 144, 143, 142, 141, 125, 126, 63, 64, 65, 66, pour les dix nombres qu'il faut mettre entre 51, 52.

Pour la ligne 51, 145, je divise 986 par dix, & je trouve 98, & reste 6; ce qui me montre qu'il y aura six nombres qui auront 99 l'un portant l'autre, & quatre qui auront 98.

Il faudra donc trouver trois couples de nombres, dont chacune sera 198, double de 99, & deux couples de 196 chacune.

Je marque les nombres de la ligne précédente avec une petite ligne ou tiret au dessous, & me sers des dix qui restent, qui estant de suite en quotité paire, (car il y en a premiérement six de suite, & puis quatre, ce qu'il faut obsérver le plus qu'on peut pour la facilité, sçavoir que les nombres qui suivent soient en quotité paire) il sera facile de trouver des couples de 198 & de 196; les trois couples de 198 seront 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. | Les deux couples de 196 seront 67, 129, | & 69, 127: on aura donc 140, 138, 136, 129, 127, 69, 67, 62, 60, 58 pour la ligne 51, 145.

Ayant ces nombres, afin de ne se point méprendre & de n'estre point en danger de les mettre en une ligne autre que celle où ils doivent estre mis, & aussi pour avoir plus en main leurs complémens, on mettra les nombres de chaque ligne au dessous des deux

nombres qui sont aux angles qui la bornent, comme on voit cy-dessous, & leurs complémens à costé.

51	52		51	145
1079			986	
144	53		140	57
143	54		138	59
142	55		136	61
141	56		129	68
125	72		127	70
126	71		69	128
63	134		67	130
64	133		62	135
65	132		60	237
66	131		58	139

Puis on disposera ces lignes autour de la figure de dix cy-devant trouvée, & l'on aura la figure suivante de douze.

Cette méthode est la plus facile de toutes, mais il seroit aisé de la découvrir en voyant la figure, si l'on n'y apporte un peu d'artifice; ce qui se pourra faire en mêlant davantage les nombres.

Par la troisiéme méthode les figures sont renduës embarassées, parce que suivant ce qu'elle ordonne, on ne s'étudie pas à prendre les nombres de suite, comme on a fait cy-devant; mais on les prend par hazard selon qu'ils se rencontrent, considérant toutefois à peu prés ce qu'il faut pour parfaire la ligne.

On fera la mesme opération qu'aux précédentes, pour sçavoir combien chaque ligne doit avoir, sçavoir multipliant 197 par 7; (car 197 est la somme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre par toute la figure, & y ayant quatorze nombres en chaque ligne de cette derniére enceinte, on aura sept couples) si donc on multiplie 197 par 7, le produit sera 1379, qui est la somme des quatorze nombres de chaque ligne de la derniére enceinte.

73													74
	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	
	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	
	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	
	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	
	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	
	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	
	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	
	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	
	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	
	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	
	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	
	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	
123													124

Je prendray donc, comme cy-devant, pour les angles deux nombres qui s'entresuivent; par éxemple, les deux moindres de ceux qui restent, sçavoir 73, 74, & leurs complémens 124, 123, & je les disposeray comme on voit icy, & ainsi qu'ils doivent estre dans la figure, & qu'ils seront aprés appliquez sur les angles de la figure de douze, comme l'on voit ici.

73	74
123	124

J'assemble aprés 73 & 74: la somme est 147, qui ostée de 1379, (qui est la somme des quatorze nombres de chaque ligne) reste 1232 pour les douze nombres qu'il faudra mettre entre 73 & 74. Je prens aussi la somme de 73 & 123, qui est

 196,

196, qui oſtée de 1379, reſte 1183 pour les douze nombres qui doivent eſtre mis entre 73 & 123.

On diſpoſera aprés de ſuite les vingt-quatre nombres qu'il faut mettre dans ces lignes, & leurs compléments.

75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
122	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111

87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Je diſpoſe comme cy-devant les nombres qu'il faut pour chaque ligne, leſquels on vient de trouver.

73 ——— 74   73 ——— 123
1232   1183

Pour remplir ces lignes par la troiſiéme méthode: Par exemple, la ligne qui doit avoir 1232, je vois que les nombres des angles ſont tous deux petits, c'eſt pourquoy il faudra ſe récompenſer aux douze nombres qu'on cherche, & pour cet effet prendre davantage des nombres de la ſéconde ligne, que de ceux de la premiére; & ſur tout obſerver, que les nombres impairs qu'on prendra ſoient en quotité paire, afin qu'ils puiſſent faire un nombre pair tel qu'eſt 1232. Je prens donc par éxemple les nombres marquez ici à coſtè, que je mets au deſſous de 1232.

```
   1232
 ---------
 —122    75
 —121    76
 —120    77
 ——78   119
 ——79   118
   117
   116
   115
    83
   113
 ——85   112
   111
 ---------
  1260
```

La ſomme de ces nombres eſt 1260, mais il ne falloit trouver que 1232, qui oſtée de 1260, reſte 28. Il faut donc diminüer ces nombres de 28, ce qui ſe peut faire en diverſes façons, comme mettant en la place de quelqu'un des nombres qui ſont icy, un nombre qui ſoit moin-

moindre de 28, pourveû que ce nombre ne soit point déja employé dans la ligne, ni son complément aussi. Par éxemple, si au lieu de 122, on prenoit 94, ou bien on peut faire cette déduction en deux nombres ou plus; ainsi au lieu de 116, on peut prendre 103, & 100 au lieu de 115: ce qui diminüeroit les nombres de 28.

Mais il y a encore une autre méthode, par laquelle on change les nombres de la ligne, en d'autres qui ont leurs complémens employez dans la mesme ligne; mais en ce cas il ne faut diminüer ou augmenter le nombre que de la moitié, comme icy de 14, parce qu'on sera obligé de changer aussi les complémens; ce qui fait doubler la correction, la quelle par conséquent ne se doit faire que de la moitié, comme on verra incontinent.

On se peut aussi servir de ces deux voyes ensemble, pour corriger le défaut ou l'excés des nombres.

Nous choisirons icy la séconde méthode pour corriger l'excés de 28, lequel doit estre réduit à la moitié, sçavoir 14, comme il a esté dit. Pour changer 122, je cherche dans la ligne quelque petit nombre dont le complément soit beaucoup moindre; par éxemple 85, dont le complément est 112, qui est moindre de 10 que 122. Je mets donc 112 à la place de 85, & de mesme à la place de 122 je mets son complément 75, comme on voit à costé de la ligne; & ainsi on aura 20 de diminution, au lieu de 10, car on oste 122, & on met 112; comme aussi on oste 85, & on met 75 à sa place.

Reste donc à diminüer les nombres de 4, pour achever 14.

Parce que les nombres qu'on a pris sont eux, ou leurs complémens tous de suite, (car le complément de 78 est 119, qui précéde 120, & ainsi des autres) il sera facile de voir de combien les complémens des nombres de la ligne seront moindres que celuy avec lequel on les voudra comparer. Par éxemple, le complément de 79 sera moindre de trois que 121, parce que 79 est le

trois-

troisiéme nombre aprés 121, & pour la mesme raison le complément de 78 sera moindre de 1, que 120. Or 3 & 1 font 4, qui est la correction réquise; je mets donc au lieu de 121, 120, 78, 79, leurs complémens sçavoir 76, 77, 119, 118, comme on voit à la page 278, où les complémens sont écrits à costé de leurs nombres, lesquels nombres sont marquez, pour montrer qu'ils ne servent plus de rien, & qu'en leur place il faut prendre ceux qui sont à costé.

Les nombres de cette ligne, dont les angles sont 73, 74, seront donc 75, 76, 77, 119, 118, 117, 116, 115, 83, 113, 112, 111, qui font ensemble la somme requise 1232.

Pour l'autre ligne, dont les angles sont 73, 123, & qui doit contenir 1183 en ses douze nombres, je prens les nombres qui restent; sçavoir

87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Et parce que les angles 73, 123, vallent à peu prés 197, qui est la valeur que doit avoir chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faut aussi que les nombres qu'on employera soient à peu prés de cette valeur: mais on prendra garde d'avoir une quotité impaire de nombres impairs, parce que la somme des douze nombres, sçavoir 1183, est impaire.

On remarquera aussi que les nombres qui sont l'un dessus l'autre, valant ensemble 197, & n'estant différens l'un de l'autre que de l'unité; si on prend un des nombres de dessous, avec le suivant de la ligne superiéure, comme 110, & 88, on aura 1 plus que 197: mais si avec le nombre de dessous, on prend le précédent de la ligne supérieure, comme 109 & 87, on aura 1 moins que 197.

1183

1183	
110	
88	
89	108
107	90
106	
92	
93	
103	
102	
96	
97	
98	

Si donc on veut que les nombres ayent 197 l'un portant l'autre, il faut mêler ces deux façons, & prendre les nombres qu'on voit icy au dessous de 1183, qui ensemble font 1181, qui est 2 moins qu'il ne faut : d'où s'ensuit qu'il faudra augmenter un des nombres de 1, car ainsi le complément estant augmenté de 1, toute l'augmentation sera de 2. Or cela se peut faire en beaucoup de maniéres ; par éxemple, mettant 108 au lieu de 107 ; car cela estant, il faudra mettre 90, complément de 107, à la place de 107, & 108, complément de 89, à la place de 89, comme on voit icy ; & ainsi 89 & 107 seront chacun augmentez de 1, puisqu'au lieu d'iceux on aura 90 & 108.

Voicy donc les nombres de la ligne qui doit estre entre les angles 73, 123, qui sont 110, 88, 108, 90, 106, 92, 93, 103, 102, 96, 97, 98. On mettra donc, comme on a fait cy-devant, les nombres de ces deux lignes au dessous de leurs angles, & leurs complémens à costé, comme l'on voit cy-aprés.

73 74		73 123	
75	122	110	87
76	121	88	109
77	120	108	89
119	78	90	107
118	79	106	91
117	80	92	105
116	81	93	104
115	82	103	94
83	114	102	95
113	84	96	101
112	85	97	100
111	86	98	99

Çela fait, je les diſpoſe autour de la précédente figure de 12, & on aura la figure de 14 parfaite, comme on la voit cy-aprés.

73	75	76	77	119	118	117	116	115	83	113	112	111	74
110	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	87
88	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	109
108	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	89
90	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	107
106	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	1
92	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	105
93	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	104
103	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	94
102	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	95
96	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	101
97	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	100
98	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	99
123	122	121	120	78	79	80	81	82	114	84	85	86	124

On pourroit bien faire que la figure auroit à ſes angles quatre nombres de ſuite, ſçavoir 97, 98, 99, 100, qui ſeroient diſpoſez comme on voit cy-aprés

La ligne qui doit eſtre entre 97 & 98 auroit 1184 en ſes douze nombres, & celle qui ſeroit miſe entre 97 & 99 aura 1183, on trouvéra que la premiére doit avoir deux couples de 196 chacun, & quatre de 198, & la ſéconde devroit avoir deux couples de

de 196, trois de 198, & un de 197; mais parce qu'on ne peut
97 98 faire aucun couple de 179, à cauſe qu'il faudroit prendre deux nombres qui ſeroient complément l'un de l'autre, au lieu du couple de 197, j'en prendray un de 198, & en récompenſe au lieu d'un de 196, j'en prendray un de 195; on en aura donc
99 100 quatre de 198, un de 196, & un de 195. Les nombres dont il ſe faut ſervir ſont les ſuivans.

73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101

La ligne qui doit eſtre entre 97 & 98, & qui vaut 1184, ſe fera aiſément, prenant 73, 123, | 75, 121, pour les deux couples de 196; | & 120, 78, | 118, 80, | 116, 82, | 114, 84, | pour les quatre couples de 198.

1183 L'autre ligne qui doit eſtre entre 97 & 99,
——— ne ſe fera pas ſi aiſément, parce que la ſomme
112 des nombres eſt impaire. On prendra 112, 86,
86 | 110, 88, | 108, 90, | 106, 92, pour les
110 quatre couples de 198, & 93, 103 pour le
88 couple de 196; mais on ne ſçauroit faire 195
108 avec les nombres qui reſtent. J'en prens donc
90 deux au haſard, en ſorte toutefois que l'un
106 d'eux ſoit pair, l'autre impair, afin que leur
—92 105 ſomme ſoit impaire, comme l'eſt 195. Par
93 éxemple, je prens 95, 96, dont la ſomme eſt
—103 94 191, qui eſt moindre de 4 que 195; il faut
95 donc augmenter un des nombres de 2, & pour
96 le faire, j'en choiſis un, qui eſtant augmenté
de 2, ne ſe trouve point dans la ligne, mais que ſon complément

y ſoit : par éxemple, je change 92, parce que 94 qui le ſurpaſſe de 2, n'eſt pas dans la ligne, mais ſon complément 103 s'y trouve.

Je mets donc au lieu de 92, ſon complément 105, & au lieu de 103, ſon complément 94, & on aura les douze nombres de cette ligne. Je les diſpoſe aprés comme l'on voit icy, & leurs complémens aprés eux.

97 98		97 99	
73	124	112	85
123	74	86	111
75	122	110	87
121	76	88	109
120	77	108	89
78	119	90	107
118	79	106	91
80	117	105	92
116	81	93	104
82	115	94	103
114	83	95	102
84	113	96	101

Je mets donc ces quatre angles & ces quatre lignes en la diſpoſition que l'on voit dans la page qui ſuit autour de la figure de 12, avec laquelle on pourra remplir l'eſpace vuide.

Il faut remarquer, qu'avec la méthode dont on s'eſt ſervi pour faire cette figure, on pourra conſtruire les autres figures intérieures, comme de 12, 10, 8 ou 6, & par la meſme façon qu'on a fait cy-devant celle de 8 qui eſt au dedans de celle de 14, ſe ſervant d'une autre de 8 qui ne dépend que d'elle-meſme, & dont le plus grand nombre eſt 64. Or ce qui fait que les figures inférieures ſe peuvent conſtruire de celle-cy, & ſes ſemblables, eſt que les nombres & leurs complémens vont de ſuite dans toutes les enceintes des figures, & n'anticipent point ſur les nombres deſtinez pour les figures ſuivantes. Ainſi en la table de 6 compriſe dans

dans celle de 14, les 36 nombres ſont les 18 moindres, & leurs complémens pris eû égard à 196.

97	73	123	75	121	120	78	118	80	116	82	114	84	98
112													85
86													111
110													87
88													109
108													89
90													107
106													91
105													92
93													104
94													103
95													102
96													101
99	124	74	122	76	77	119	79	117	81	115	83	113	100

En la table de 8, les 64 nombres ſont les 32 moindres, & leurs complémens pris ſur 196.

En celle de 10, les 100 nombres ſont les 50 moindres, & leurs complémens.

Et en celle de 12, les 144 nombres ſont les 72 moindres, & leurs complémens pris toûjours ſur 196.

Mais pour faire de la précédente table de 14 une figure

moindre : par éxemple, celle de 10 en laquelle le plus grand nombres soit 100, il faut laisser les 50 premiers & moindres nombres en la disposition qu'on les trouvéra en la table de 10, faisant partie de celle de 14; & pour les autres 50 qui sont les complémens des 50 premiers, au lieu qu'en la table de 10 qui fait partie de celle de 14, on les a pris sur 196, il ne les faudra prendre que sur 100: & afin de ne se point tromper, & de ne prendre point un nombre pour un autre, on écrira les 50 premiers nombres, sçavoir 1, 2, 3, 4, &c. & au dessous dans une séconde ligne, leurs complémens pris sur 196, comme ils sont cy-devant, & dans une troisiéme ligne au dessous, on mettra les complémens des mesmes nombres de la premiére ligne pris sur 100, comme on voit icy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
49	50										
148	147										
52	51										

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	A
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	
42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	

34	66	65	64	62	60	43	40	38	33	
57	19	80	79	78	77	26	25	20	44	
56	74	9	89	90	87	18	10	27	45	
54	72	16	1	99	98	4	85	29	47	B
51	69	84	96	6	7	93	17	32	50	
49	31	88	8	94	95	5	13	70	52	
48	30	15	97	3	2	100	86	71	53	
46	28	91	12	11	14	83	92	73	55	
42	81	21	22	23	24	75	76	82	59	
68	35	36	37	39	41	58	61	63	67	

La table cottée A, eſt celle de 10 qui fait partie de celle de 14, & contient les nombres de la premiére & ſéconde ligne.

La table cottée B, eſt celle de 10 ſimplement, & ne fait partie de nulle autre, & contient les nombres de la premiére & troiſiéme ligne.

En cette table B, les nombres de la premiére ligne, ſçavoir depuis 1 juſques à 50, ſont aux meſmes lieux qu'en la table A.

Et ceux de la troiſiéme ligne, ſçavoir depuis 51 juſques à 100, ſont à la place de ceux de la ſéconde ligne, en la table A : ainſi pour faire la table B, je commence par le premier nombre 34 de la table A, lequel eſtant moindre que 50, je le laiſſe en la table B au meſme lieu, & pourſuivant je trouve 162, 161, 160, 158, 156, qui ſurpaſſent 50, c'eſt pourquoy je cherche dans la ſéconde ligne le lieu où ils ſont, & prens au lieu d'eux le nombre qui eſt dans la troiſiémé ligne, ſçavoir 66, 65, 64, 62, 60, que je mets enſuite de 34, & aux meſmes lieux où eſtoient 162, 161, 160, 158, 156; & ainſi continuant en la meſme ſorte, on achévera la table B, comme elle eſt icy.

Mais on n'eſt pas obligé de faire les tables en telle ſorte, que les nombres d'une enceinte n'anticipent pas ſur l'autre, car on peut prendre les nombres au hazard & comme ils viendront, & ſi on ne laiſſera pas d'avoir une figure parfaite, mais elle ne pourra pas ſervir, comme la précédente, à faire une figure moindre. Par éxemple, ſi en la ligne intérieure de 10 il y avoit des nombres plus grands que 50, & moindres que 99, on ne pourroit pas la transformer en une ſimple, dont le plus grand nombre fuſt 100.

On pourroit auſſi mettre les nombres de ſuite aux enceintes ſans les entremeſler; mais par un ordre contraire au précédent, ſçavoir mettant les nombres du milieu à la figure de 4, & les ſuivans, avec leurs complémens à l'enceinte de 6, & ainſi continuant juſques à la derniére enceinte.

Par

Par ce moyen la table de 4 contiendroit les nombres suivans.

98	97	96	95	94	93	92	91
99	100	101	102	103	104	105	106

L'enceinte de la table de 6 contiendra,

90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
107	108	109	110	111	112	113	114	115	116

Celle de la table de 8 contiendroit,

80	79	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69
117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128

68	67
129	130

Celle de 10 auroit,

66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142

54	53	52	51	50	49
143	144	145	146	147	148

Celle de 12 contiendroit

48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160

36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170

Enfin la derniére enceinte de 14 contiendroit le reste des nombres, qui est,

26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194
2	1										
195	196										

Et la figure estant disposée selon la méthode dont il a esté parlé cy-devant, on aura celle qui suit.

195	171	25	180	23	179	21	178	24	175	16	14	177	1
3	28	31	32	164	163	162	161	160	159	48	47	27	194
189	30	49	133	66	137	65	136	54	135	63	147	167	8
13	39	146	129	77	118	70	121	71	72	130	51	158	184
4	44	144	73	116	85	110	89	109	82	124	53	153	193
15	40	58	78	84	103	93	92	106	113	119	139	157	182
185	156	56	128	86	98	100	101	95	111	69	141	41	12
7	155	138	74	83	102	96	97	99	114	123	59	42	190
187	154	57	117	107	91	105	104	94	90	80	140	43	10
6	168	142	122	115	112	87	108	88	81	75	55	29	191
186	152	145	67	120	79	127	76	126	125	68	52	45	11
188	46	50	64	131	60	132	61	143	62	134	148	151	9
5	170	166	165	33	34	35	36	37	38	149	150	169	192
196	26	172	17	174	18	176	19	173	22	181	183	20	2

DE L'ATTACHEMENT DES FIGURES *partiales & intérieures.*

En la façon précédente de faire les figures, celles qui sont au dedans sont en quelque façon détachées, ou plûtost sont capables d'estre détachées l'une d'avec l'autre, ainsi qu'il a esté dit: car si on oste la premiére enceinte de la précédente figure de 14, la figure de 12 qui restera aura les conditions requises; pareillement si on oste deux enceintes, il démeurera une figure de 10, qui aura encore toutes les lignes égales.

Que si on oste trois enceintes, on aura encore la table de 8, avec les mesmes conditions; & si on oste quatre enceintes, on aura la table de 6, qui sera encore selon les regles: enfin si on oste cinq enceintes, il restera la table de 4 qui aura pareille qualité.

Mais il y a moyen d'attacher les enceintes l'une à l'autre, en telle sorte que lorsqu'on en ostera quelqu'une, les autres, ou laquelle on voudra de celles qui restent, ne soit point selon les loix; quoy-que la figure totale qui est icy de 14, demeure toûjours bonne. Ce qui doit toûjours estre supposé, & en cecy il n'y a point de restriction; car on choisit laquelle on veut, pour estre bonne, ou mauvaise.

Exemple. On pourra faire que la table entiére de 14 demeurant bonne, celle de 12 ne vaudra rien, mais les autres de 10, 8, 6 & 4, seront bonnes.

Ou bien qu'il n'y aura que celle de 10 qui n'ait pas les conditions réquises, ou que ce sera celle de 8, 6 ou 4 seulement, en laquelle arrivera ce défaut.

On peut faire aussi qu'il y en aura deux, & lesquelles on voudra, qui n'auront pas les conditions réquises, comme celles de 12 & de 10, ou de 12 & de 8, ou de 12 & de 6, ou de 12 & de 4.

Ou bien celles de 10 & de 8, de 10 & de 6, ou de 10 & de 4.

 Ou

Ou celles de 8 & de 6, de 8 & de 4, ou de 6 & de 4.

Comme aussi on pourra faire que trois de ces figures ne vaudront rien, mais que les autres seront bonnes: par éxemple, que celles de 12, 10 & 8 ne vaudront rien, ou celles de 12, 10 & 6, ou de 12, 10 & 4, ou de 12, 8, 6, ou de 12, 8, 4, ou de 12, 6, 4, ou de 10, 8, 6, ou de 10, 8, 4, ou de 10, 6, 4, ou enfin de 8, 6 & 4. Les autres estans disposées selon les loix.

Pareillement on fera que quatre des tables intérieures ne vaudront rien, & la cinquiéme sera bonne, & cette cinquiéme sera laquelle on voudra; sçavoir celle de 12, ou celle de 10 & de 8, de 6 ou de 4, où il faut toûjours supposer que l'extérieure, ou totale, soit bonne.

Enfin on peut faire en sorte que la seule figure totale sera bonne, & qu'aucune des particuliéres & intérieures n'aura les conditions requises.

Cet attachement se fait, transposant deux nombres d'une enceinte, à la place de deux autres équivalens d'une autre enceinte, en telle sorte que les nombres démeurent en la mesme ligne ou colomne où chacun d'eux estoit auparavant; de sorte que pour faire cette transmutation ou transport, il faut que les nombres soient vis-à-vis l'un de l'autre, & s'ils n'y sont pas, il les y faut mettre, changeant aussi leurs complémens pour les mettre vis-à-vis de leurs nombres, les laissant pourtant dans leur mesme enceinte, de peur que la figure totale ne soit gastée. On peut voir ensuite des éxemples de cela.

On veut faire en sorte qu'en la précédente figure de 14, qui est en la page 290, si on oste une enceinte, la figure de 12 qui restera ne vaille rien, mais les autres 10, 8 & 6 soient bonnes. Je prens deux lignes prochaines & paralleles, l'une de la figure de 14, & l'autre de celle de 12, & mets aussi leurs complémens vis-á-vis, comme on voit icy. Or il ne faut point comprendre dans ces lignes les nombres qui sont aux angles.

Les

A	B	C	D
3			194
189	30	167	8
13	39	158	184
4	44	153	193
15	40	157	182
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
186	152	45	11
188	46	151	9
5			192

Premiere Fig.

Les nombres de la colomne D, sont complémens de ceux de la colomne A, & ceux de la colomne C, sont complémens de ceux de la colomne B.

Pour attacher ces deux figures ensemble, je cherche deux nombres dans la colomne A, égaux à deux de la colomne B, comme s'ensuit.

La somme de 3 & de 189, est 192; je cherche en B ou en C deux nombres qui fassent pareillement 192. Prenons 30 pour un des deux nombres, l'autre doit estre 162, lequel n'est point dans la ligne B. Je prens le suivant 39; le reste pour parvenir à 192 seroit 153, qui n'est point en B; prenant 44, il faudroit avoir 148: & enfin prenant 40, le reste sera 152 qui se trouve en B; on aura donc 40 & 152, qui ensemble font autant que 3 & 189.

Mais parce que 3 & 189 ne sont pas vis-à-vis de 40 & 152, il les y faut mettre en plaçant 3 à la place de 15, & en suite 15 à la place de 3; & par mesme moyen 194, complément de 3, en la colomne D, en la place de 182, complément de 15, parce que 15 estoit vis-à-vis de l'un des nombres de la ligne B, sçavoir de 40.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
3	40	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
189	152	45	8
188	46	151	9
5			192

Seconde Fig.

Semblablement je fais un échange de place entre 189, & ſon complément 8 avec 186, & ſon complément 11, parce que 186 eſt vis-à-vis de l'autre nombre 152: on aura donc 3, 189, vis-à-vis de 40, 152, comme on voit en la ſéconde table.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
40	3	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
152	189	45	8
188	46	151	9
5			192

Troiſiéme Fig.

Maintenant pour faire l'attachement, je mets 3 à la place de 40 qui eſt vis-à-vis; & 189 à la place de 152; & cette transpoſition eſtant faite, ſi on oſtoit la premiére enceinte de la figure en laquelle les lignes ſeroient diſpoſées ſelon la ſuite des nombres contenus aux colonnes A, B, C, D de la troiſiéme figure, la table de 12 n'auroit pas ſes lignes égales, mais bien celles de 10, 8, 6 & 4.

Il faut rémarquer, qu'à cette ſéconde tranſpoſition on ne touche point aux colomnes C, D où ſont les complémens.

Par ce changement, la figure entiére de 14 ne reçoit aucun dommage, puiſque les lignes diſpoſées ſelon la ſuite A, B, C, D ne changent point de nombres, mais retiennent toûjours les meſmes; & les colomnes qui vont de haut en bas changent bien de nombres, mais en leurs places elles en reçoivent d'équivalens. Par éxemple, la colomne A, au lieu de 3, 189 qu'elle avoit, re-

reçoit 40, 152, qui valent autant : mais ſi on prend la figure de 12 toute ſeule, il n'en ira pas ainſi ; car encore que la colomne B, à la prendre de haut en bas, ne reçoive aucun dommage, il n'en eſt pas de meſme aux deux lignes qui vont ſelon la ſuite A, B, C, D, car en celle où ſont 3, 157, on a mis 3 tout ſeul à la place de 40, puiſque la ligne de la table de 12 ne commence qu'en 40 ; d'où s'enſuit que cette ligne ſera trop petite de 37 ; & en la ligne 189, 45, on a mis 189 à la place de 152, & ainſi elle ſera trop grande de 37.

Pour les autres figures de 10, 8, 6 & 4, elles ne reçoivent aucun changement, parce qu'on n'y a point touché.

On peut prendre, ſi on veut, trois nombres ou plus dans la colomne A, & en choiſir autant d'autres, dont la ſomme ſoit égale dans la colomne B, ou dans ſon oppoſée C, & les tranſpoſer comme devant.

On auroit pû prendre 41, 151 dans la colomne C de la premiére figure, pour faire 192. De meſme, ſi on avoit pris 3, 188 dans la colomne A, qui font 191, on trouvéroit 39, 152 dans la colomne B, qui font 191. Enfin on peut trouver ces égalitez en beaucoup de maniéres.

A	B
30	
39	146
44	144
40	58
156	56
155	138
154	57
168	142
152	145
46	

Si on vouloit gaſter la figure de 10 ſeulement, il faudroit tranſpoſer des nombres de l'enceinte de la figure de 12, a la place d'autres nombres équivalens de la figure de 10, & prendre leurs lignes ou colomnes comme devant, & comme on les voit icy.

Ainſi ayant trouvé que 44 & 155 de la colomne A en la table précédente, ſont égaux à 57, 142 de la colomne B, aprés avoir mis 44, 155 vis-à-vis de 57, 142, comme devant, & pareillement leurs complémens qui ſont en la colomne oppoſée de la table, je les tranſpoſe d'une colomne en l'autre, mettant 44, 155 à la place de 57, 142, & on les aura en la façon qu'ils ſont à la page ſuivante.

Et ſi on les applique à la figure de 14 en cette diſpo-

po-

A position, & qu'on en oste deux enceintes, la figure
de 10 qui restera ne sera pas bonne; mais quelqu'autres
30 enceintes qu'on puisse oster, ce qui restera ne laissera
39 146 pas d'estre bon. On auroit pû prendre 30, 168,
154 144 la somme est 198; leurs égaux dans la colomne B,
40 58 sont 56, 142, ou bien 39, 156, ausquels sont égaux
156 56 138, 57 en l'autre colomne, ou bien 39, 155, &
168 138 on aura 56, 138, qui valent autant, comme aussi
57 44 44, 156 font autant que 144, 56, & que 58,
142 155 142, & 44, 155 font autant que 57, 142, &c.
152 145 On fera la mesme chose des autres enceintes; car si
46 on vouloit que la table de 8 toute seule ne valust rien,
on méleroit l'enceinte de 8 avec la précédente qui est
de 10; & pour gaster la table de 6, on changera des nombres de
son enceinte avec celle de 8, &c.

Pour gaster deux tables de suite, il faut méler les nombres de la moindre, avec ceux de l'enceinte qui les enveloppe toutes deux. Par éxemple, pour faire que les tables de 12 & de 10 ne vaillent rien, les autres demeurant bonnes, on changera les nombres de l'enceinte de 14, en des équivalents de celle de 10.

Et pour gaster les tables de 10 & de 8 seulement, on changera les nombres de la table de 8, en ceux de la table de 12, qui est celle qui enveloppe celle de 10.

Toutes les autres diversitez qu'on pourroit apporter à faire quelques-unes des figures bonnes, & quelqu'autres mauvaises, se feront en la façon qui a esté montrée, changeant toûjours les nombres de la figure qu'on veut gaster, avec la précédente qu'on veut conserver bonne. Il seroit trop long d'apporter des éxemples de chaque sorte, veû mesme que ce qui a esté dit peut suffire estant bien entendu.

Il y a plusieurs autres maniéres de gaster ou attacher les figures. En voicy des éxemples.

Je cherche deux nombres aux deux colomnes marquées A de la fi-

figure précédente, sçavoir un en chacune, qui soient égaux à deux autres des mesmes lignes: par éxemple, 154 & 144 font 298, & pareillement 146 & 152 font 298. Et parce que 154 & 144 font vis-à-vis l'un de l'autre, on n'aura que faire d'y toucher; mais pour 152, il le faudra mettre vis-à-vis de 146, ou 146 à la place de 145, vis-à-vis de 152, & la ligne sera comme on la voit icy; & en mesme temps aussi on transposera le complément de 152 qui est en la ligne opposée dans la figure précédente de 14, vis-à-vis de 152; & pareillement le complément de 39, parce qu'on a mis 152 en sa place.

			B	
30			30	
152	146		154	144
154	144		152	146
40	58		40	58
156	56		156	56
168	138		168	138
57	44		57	44
142	155		142	155
39	145		39	145
46			46	

Cela fait, on mettra 152, 146 à la place de 154, 144, comme on voit en la figure B; & en faisant ce dernier changement, il ne faut point toucher aux complémens, car c'est en cela que consiste l'attachement des enceintes l'une à l'autre, sçavoir, à transposer d'une enceinte à l'autre, ou d'une ligne à l'autre des nombres équivalens, sans toucher à leurs complémens.

On a encore 142, 56, qui font 198.

On a aussi 154, 56, qui font 210, & 152, 58 qui font autant.

On peut aussi changer les nombres qui sont aux angles. Ainsi

en la figure qui a 14 de coſté, on pourra mettre 196 à la place de 170: & parce que 196 ſurpaſſe 170 de 26, il faudra trouver dans la colonne 171, 26, entre les nombres 28, 170, qui ſont les angles de la table de 12, un nombre qui ſurpaſſe de 26 quelqu'un de ceux qui ſont entre 195, 196; tel eſt 39 qui ſurpaſſe 13 de 26, comme auſſi 30 qui ſurpaſſe 4 de 26; & par meſme moyen il faudroit un nombre entre 170 & 169 de la ligne 5, 192, un nombre qui ſurpaſſât de 26 quelqu'un des nombres qui ſont entre 196 & 2: & parce qu'il ne s'en trouve point, on en cherchera deux entre 170 & 169 qui ſurpaſſe de 26 deux autres de la ligne 196, 2; tels ſont 33 & 35, dont la ſomme eſt 68, qui ſurpaſſent de 26 les nombres 20 & 22, dont la ſomme eſt 42, de meſme 33 & 34, dont la ſomme eſt 67, ſurpaſſent de 26 les nombres 19 & 22, dont la ſomme eſt 41. Si on ne trouvoit pas deux nombres qui fiſſent l'égalité, on en pourroit prendre trois ou quatre, ou davantage.

On peut faire auſſi des tables impaires par la méthode précédente, dont on s'eſt ſervi pour faire les paires, comme on peut voir en la table de 5 qui eſt icy, en laquelle les rélatifs ſont dans les lignes oppoſées, & dans la meſme diagonale.

1	18	21	22	3
2	12	17	10	24
20	11	13	15	6
19	16	9	14	7
23	8	5	4	25

Or on peut varier cette table en beaucoup de maniéres, à cauſe qu'elle eſt détachée, & que les nombres qui ſont aux extrémitez des lignes, ou colomnes, ſont complémens l'un de l'autre, (c'eſt

à

à dire qu'ils font autant étant joints l'un à l'autre, que les deux nombres extrémes) ainsi qu'on voit en 2 & 24; 20 & 6; 18 & 8, &c. & pareillement les nombres des angles opposez dans les diagonales, comme 1 & 25; 3 & 23. Et pareillement on peut transposer la table intérieure de 9 toute entiére, c'est à dire sans toucher à l'ordre des nombres, qui ne se peut changer, ce qui se fait en huit façons: puis considérant la premiére colomne de l'enceinte extérieure, on y trouve trois nombres sans les angles, sçavoir 2, 20, 19, qui se peuvent varier en six façons, suivant la combinaison d'ordre de trois choses; & pareillement la premiére ligne ou sont les trois nombres 18, 21, 22, se peut varier en six sortes. Si donc on multiplie ces trois nombres 8, 6, 6 l'un par l'autre, on aura 288, qui est la quantité des changemens & variations qu'on peut donner à cette table; & ainsi on fera 288 tables différentes de la précédente.

Pareillement on variera en beaucoup de sortes une table de six détachée: par exemple celle qui est icy.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Car premiérement, la table de 4 de costé qui est au dedans se peut varier en 880 sortes, dont chacune se peut transposer en huit façons, qui font en tout 7040 changemens, qui se feront sans toucher à l'enceinte extérieure, en laquelle les nombres de la collonne, qui sont quatre sans les angles, se peuvent varier en vingt-quatre sortes, selon la combinaison d'ordre de quatre cho-

ses, & pareillement il y a quatre nombres en la ligne de la mesme enceinte extérieure, qui se varieront aussi en vingt-quatre façons; & ainsi il faudra multiplier 7040 par vingt quatre, & le produit encore par vingt-quatre, pour avoir la quantité des tables qu'on peut faire en variant une seule d'entre elles, comme celle qui est icy, qui seront en tout 4055040 tables. Or on ne prend que les quatre nombres du milieu de chaque ligne de l'enceinte, sans toucher aux angles, afin qu'y ayant en la table quelques nombres qui ne soient point remuez, on ait de vrayes variations, & non point des transpositions de la table entiére.

Tables de 5. dont chacune se peut varier en 288 façons.

5	20	17	12	11
24	10	25	4	2
3	7	13	19	23
18	22	1	16	8
15	6	9	14	21

5	18	17	14	11
2	10	25	4	24
23	7	13	19	3
20	22	1	16	6
15	8	9	12	21

6	24	15	12	8
3	10	25	4	23
21	7	13	19	5
17	22	1	16	9
18	2	11	14	20

6	23	17	11	8
24	10	25	4	2
5	7	13	19	21
12	22	1	16	14
18	3	9	15	20

6	24	8	15	12
23	10	25	4	3
5	7	13	19	21
17	22	1	16	9
14	2	18	11	20

9	24	3	18	11
21	10	25	4	5
6	7	13	19	20
14	22	1	16	12
15	2	23	8	17

9	2	23	20	11
21	10	25	4	5
8	7	13	19	18
12	22	1	16	14
15	24	3	6	17

9	21	6	18	11
24	10	25	4	2
3	7	13	19	23
14	22	1	16	12
15	5	20	8	17

1	23	20	17	4
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
22	3	6	9	25

3

3	25	19	14	4	3	25	22	9	6	3	25	19	12	6
20	10	24	5	6	19	10	24	5	7	22	10	24	5	4
9	8	13	18	17	11	8	13	18	15	9	8	13	18	17
11	21	2	16	15	12	21	2	16	14	11	21	2	16	15
22	1	7	12	23	20	1	4	17	23	20	1	7	14	23

4	25	23	6	7	4	23	17	14	7	4	25	6	19	11
17	10	24	5	9	25	10	24	5	1	23	10	24	5	3
11	8	13	18	15	6	8	13	18	20	9	8	13	18	17
14	21	2	16	12	11	21	2	16	15	14	21	12	16	12
19	1	3	20	22	19	3	9	12	22	15	1	20	7	22

4	23	20	7	11	2	23	20	12	8	2	23	20	8	12
25	10	24	5	1	9	10	25	4	17	11	10	25	4	15
9	8	13	18	17	15	7	13	19	11	17	7	13	19	9
12	21	2	16	14	21	22	1	16	5	21	22	1	16	5
15	3	6	19	22	18	3	6	14	24	14	3	6	18	24

2	23	17	11	12	3	24	18	15	5	3	24	21	8	9
8	10	25	4	18	9	10	25	4	17	20	10	25	4	6
20	7	13	19	6	12	7	13	19	14	11	7	13	19	15
21	22	1	16	5	20	22	1	16	6	14	22	1	16	12
14	3	9	15	24	21	2	8	11	23	17	2	5	18	23

3	24	15	14	9
6	10	25	4	20
18	7	13	19	8
21	22	1	16	5
17	2	11	12	23

3	21	18	14	9
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
15	22	1	16	11
17	5	8	12	23

3	24	21	6	11
18	10	25	4	8
17	7	13	19	9
12	22	1	16	14
15	2	5	20	23

3	21	18	12	11
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
17	22	1	16	9
15	5	8	14	23

3	20	17	14	11
24	10	25	4	2
5	7	13	19	21
18	22	1	16	8
15	6	9	12	23

TABLE GENERALE
DES
QUARREZ DE QUATRE.

β				β				β				β			
1	13	8	12	1	13	12	8	1	13	8	12	1	13	12	8
16	4	9	5	16	4	5	9	16	4	9	5	16	4	5	9
11	7	14	2	7	11	14	2	10	6	15	3	6	10	15	3
6	10	3	15	10	6	3	15	7	11	2	14	11	7	2	14

γ				α				α				γ			
1	14	8	11	1	14	11	8	1	14	7	12	1	14	12	7
15	4	10	5	15	4	5	10	15	4	9	6	15	4	6	9
12	7	13	2	6	9	16	3	10	5	16	3	8	11	13	2
6	9	3	16	12	7	2	13	8	11	2	13	10	5	3	16

δ				δ				α				δ			
1	11	14	8	1	14	11	8	1	14	7	12	1	10	15	8
16	5	4	9	16	5	4	9	16	5	10	3	16	6	3	9
7	12	13	2	7	12	13	2	9	4	15	6	5	11	14	4
10	6	3	15	10	3	6	15	8	11	2	13	12	7	2	13

δ				β				β				β			
1	15	10	8	1	11	8	14	1	11	14	8	1	11	14	8
16	6	3	9	16	6	9	3	16	6	3	9	16	6	3	9
5	11	14	4	13	7	12	2	4	10	15	5	7	13	12	2
12	2	7	13	4	10	5	15	13	7	2	12	10	4	5	15

β	γ	α	γ
1 11 8 14	1 12 8 13	1 12 13 8	1 12 14 7
16 6 9 3	15 6 10 3	15 6 3 10	15 6 4 9
10 4 15 5	14 7 11 2	4 9 16 5	8 13 11 2
7 13 2 12	4 9 5 16	14 7 2 11	10 3 5 16
α	β	β	β
1 12 7 14	1 10 8 15	1 10 15 8	1 10 15 8
15 6 9 4	16 7 9 2	16 7 2 9	16 7 2 9
10 3 16 5	13 6 12 3	4 11 14 5	6 13 12 3
8 13 2 11	4 11 5 14	13 6 3 12	11 4 5 14
β	δ	δ	γ
1 10 8 15	1 12 13 8	1 13 12 8	1 12 8 13
16 7 9 2	16 7 2 9	16 7 2 9	14 7 11 2
11 4 14 5	3 10 15 6	3 10 15 6	15 6 10 3
6 13 3 12	14 5 4 11	14 4 5 11	4 9 5 16
α	γ	α	δ
1 12 13 8	1 12 15 6	1 12 6 15	1 10 7 16
14 7 2 11	14 7 4 9	14 7 9 4	14 8 9 3
4 9 16 5	8 13 10 3	11 2 16 5	15 5 12 2
15 6 3 10	11 2 5 16	8 13 3 10	4 11 6 13
β	β	γ	δ
1 10 7 16	1 11 6 16	1 11 16 6	1 11 6 16
15 8 9 2	14 8 9 3	14 8 3 9	15 8 9 2
14 5 12 3	15 5 12 2	4 10 13 7	14 5 12 3
4 11 6 13	4 10 7 13	15 5 2 12	4 10 7 13

γ				γ				δ				β			
1	10	16	7	1	10	16	7	1	10	7	16	1	10	7	16
15	8	2	9	15	8	2	9	12	8	9	5	15	8	9	2
4	11	13	6	6	13	11	4	15	3	14	2	12	3	14	5
14	5	3	12	12	3	5	14	6	13	4	11	6	13	4	11
γ				β				δ				δ			
1	12	6	15	1	12	15	6	1	15	12	6	1	11	6	16
13	8	10	3	13	8	3	10	13	8	3	10	12	8	9	5
16	5	11	2	4	9	14	7	4	9	14	7	14	2	15	3
4	9	7	14	16	5	2	11	16	2	5	11	7	13	4	10
β				γ				γ				β			
1	11	6	16	1	11	16	6	1	12	7	14	1	12	14	7
14	8	9	3	14	8	3	9	13	8	11	2	13	8	2	11
12	2	15	5	7	13	10	4	16	5	10	3	4	9	15	6
7	13	4	10	12	2	5	15	4	9	6	15	16	5	3	10
δ				δ				δ				δ			
1	13	4	16	1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16
14	8	9	3	14	9	8	3	15	9	8	2	12	9	8	5
12	2	15	5	15	6	11	2	14	6	11	3	15	4	13	2
7	11	6	10	4	12	5	13	4	12	5	13	6	14	3	11
δ				δ				δ				δ			
1	7	10	16	1	12	15	6	1	12	5	16	1	12	5	16
15	9	8	2	14	9	4	7	14	9	8	3	15	9	8	2
12	4	13	5	3	8	13	10	15	6	11	2	14	6	11	3
6	14	3	11	16	5	2	11	4	7	10	13	4	7	10	13

δ				δ				δ				δ			
1	14	3	16	1	6	12	15	1	12	13	8	1	12	6	15
15	9	8	2	16	9	7	2	16	9	4	5	16	9	7	2
12	4	13	5	13	8	10	3	2	7	14	11	13	8	10	3
6	7	10	11	4	11	5	14	15	6	3	10	4	5	11	14
δ				δ								δ			
1	4	15	14	1	15	4	14	1	6	12	15	1	6	11	16
16	10	5	3	16	10	5	3	13	10	8	3	12	10	7	5
9	7	12	6	9	7	12	6	16	7	9	2	13	3	14	4
8	13	2	11	8	2	13	11	4	11	5	14	8	15	2	9
δ				δ								δ			
1	6	11	16	1	12	13	8	1	12	6	15	1	13	12	8
13	10	7	4	15	10	3	6	13	10	8	3	15	10	3	6
12	3	14	5	2	7	14	11	16	7	9	2	2	7	14	11
8	15	2	9	16	5	4	9	4	5	11	14	16	4	5	9
β				β				α				β			
1	7	12	14	1	7	14	12	1	7	14	12	1	7	12	14
16	10	5	3	16	10	3	5	16	10	3	5	16	10	5	3
13	11	8	2	4	6	15	9	11	13	8	2	6	4	15	9
4	6	9	15	13	11	2	8	6	4	9	15	11	13	2	8
γ				α				γ				α			
1	8	12	13	1	8	13	12	1	8	14	11	1	8	11	14
15	10	6	3	15	10	3	6	15	10	4	5	15	10	5	4
14	11	7	2	4	5	16	9	12	13	7	2	6	3	16	9
4	5	9	16	14	11	2	7	6	3	9	16	12	13	2	7

δ				δ				δ				δ			
1	4	14	15	1	14	4	15	1	5	12	16	1	5	12	16
16	11	5	2	16	11	5	2	14	11	6	3	15	11	6	2
9	6	12	7	9	6	12	7	15	8	9	2	14	8	9	3
8	13	3	10	8	3	13	10	4	10	7	13	4	10	7	13
δ				δ				δ				δ			
1	5	12	16	1	5	12	16	1	10	15	8	1	10	7	16
10	11	6	7	15	11	6	2	14	11	4	5	14	11	6	3
15	4	13	2	10	4	13	7	3	6	13	12	15	8	9	2
8	14	3	9	8	14	3	9	16	7	2	9	4	5	12	13
δ				δ				β				β			
1	10	7	16	1	14	3	16	1	6	12	15	1	6	15	12
15	11	6	2	15	11	6	2	16	11	5	2	16	11	2	5
14	8	9	3	10	4	13	7	13	10	8	3	4	7	14	9
4	5	12	13	8	5	12	9	4	7	9	14	13	10	3	8
β				β				δ				δ			
1	6	15	12	1	6	12	15	1	8	13	12	1	13	8	12
16	11	2	5	16	11	5	2	16	11	2	5	16	11	2	5
10	13	8	3	7	4	14	9	3	6	15	10	3	6	15	10
7	4	9	14	10	13	3	8	14	9	4	7	14	4	9	7
γ				α				γ				α			
1	8	12	13	1	8	13	12	1	8	15	10	1	8	10	15
14	11	7	2	14	11	2	7	14	11	4	5	14	11	5	4
15	10	6	3	4	5	16	9	12	13	6	3	7	2	16	9
4	5	9	16	15	10	3	6	7	2	9	16	12	13	3	6

1	4	15	14	1	4	14	15	1	9	16	8	1	9	16	8
9	12	7	6	9	12	6	7	14	12	5	3	15	12	5	2
16	5	10	3	16	5	11	2	4	6	11	13	4	7	10	13
8	13	2	11	8	13	3	10	15	7	2	10	14	6	3	11
	δ				β				γ				β		
1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	16	11	1	7	10	16
14	12	5	3	15	12	5	2	15	12	2	5	14	12	5	3
15	9	8	2	14	9	8	3	4	7	13	10	15	9	8	2
4	7	10	13	4	7	10	13	14	9	3	8	4	6	11	13
	δ				γ				δ				β		
1	7	10	16	1	7	16	10	1	6	11	16	1	6	11	16
15	12	5	2	14	12	3	5	8	12	5	9	15	12	5	2
14	9	8	3	4	6	13	11	15	3	14	2	8	3	14	9
4	6	11	13	15	9	2	8	10	13	4	7	10	13	4	7
	γ				γ				β				δ		
1	6	16	11	1	8	10	15	1	8	15	10	1	13	4	16
15	12	2	5	13	12	6	3	13	12	3	6	15	12	5	2
10	13	7	4	16	9	7	2	4	5	14	11	8	3	14	9
8	3	9	14	4	5	11	14	16	9	2	7	10	6	11	7
	δ				γ				β				γ		
1	7	10	16	1	7	16	10	1	7	10	16	1	8	11	14
8	12	5	9	14	12	3	5	14	12	5	3	13	12	7	2
14	2	15	3	11	13	6	4	8	2	15	9	16	9	6	3
11	13	4	6	8	2	9	15	11	13	4	6	4	5	10	15

β				δ				δ				δ			
1	8	14	11	1	13	4	16	1	3	14	16	1	3	14	16
13	12	2	7	14	12	5	3	12	13	4	5	15	13	4	2
4	5	15	10	8	2	15	9	15	8	9	2	12	8	9	5
16	9	3	6	11	7	10	6	6	10	7	11	6	10	7	11
δ				δ				δ				δ			
1	3	14	16	1	3	14	16	1	10	7	16	1	10	7	16
15	13	4	2	10	13	4	7	12	13	4	5	15	13	4	2
10	6	11	7	15	6	11	2	15	8	9	2	12	8	9	5
8	12	5	9	8	12	5	9	6	3	14	11	6	3	14	11
δ				δ				β				β			
1	10	15	8	1	12	5	16	1	4	14	15	1	4	15	14
12	13	6	3	15	13	4	2	16	13	3	2	16	13	2	3
5	4	11	14	10	6	11	7	11	10	8	5	6	7	12	9
16	7	2	9	8	3	14	9	6	7	9	12	11	10	5	8
β				β				δ				δ			
1	4	15	14	1	4	14	15	1	8	10	15	1	10	8	15
16	13	2	3	16	13	3	2	16	13	3	2	16	13	3	2
10	11	8	5	7	6	12	9	5	4	14	11	5	4	14	11
7	6	9	12	10	11	5	8	12	9	7	6	12	7	9	6
δ				δ											
1	7	14	12	1	7	14	12	1	7	16	10	1	7	16	10
8	13	2	11	11	13	2	8	11	13	4	6	14	13	4	3
9	4	15	6	6	4	15	9	14	12	5	3	11	12	5	6
16	10	3	5	16	10	3	5	8	2	9	15	8	2	9	15

δ				δ				γ				α			
1	8	9	16	1	11	6	16	1	8	14	11	1	8	11	14
14	13	4	3	14	13	4	3	12	13	7	2	12	13	2	7
7	2	15	10	7	2	15	10	15	10	4	5	6	3	16	9
12	11	6	5	12	8	9	5	6	3	9	16	15	10	5	4

γ				α				δ							
1	8	15	10	1	8	10	15	1	2	15	16	1	2	16	15
12	13	6	3	12	13	3	6	12	14	3	5	13	14	4	3
14	11	4	5	7	2	16	9	13	7	10	4	12	7	9	6
7	2	9	16	14	11	5	4	8	11	6	9	8	11	5	10

δ				δ				δ				δ			
1	2	15	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	4	13	16
13	14	3	4	12	14	3	5	13	14	3	4	12	14	3	5
12	7	10	5	13	7	10	4	12	7	10	5	15	9	8	2
8	11	6	9	8	2	15	9	8	2	15	9	6	7	10	11

β				γ				β				γ			
1	4	13	16	1	4	16	13	1	7	10	16	1	7	16	10
15	14	3	2	15	14	2	3	12	14	3	5	12	14	5	3
12	9	8	5	6	7	11	10	15	9	8	2	6	4	11	13
6	7	10	11	12	9	5	8	6	4	13	11	15	9	2	8

δ				δ				γ				β			
1	7	10	16	1	4	13	16	1	4	16	13	1	4	13	16
15	14	3	2	8	14	3	9	15	14	2	3	15	14	3	2
12	9	8	5	15	5	12	2	10	11	7	6	8	5	12	9
6	4	13	11	10	11	6	7	8	5	9	12	10	11	6	7

γ	β	δ	
1 8 10 15	1 8 15 10	1 11 6 16	1 5 16 12
11 14 4 5	11 14 5 4	15 14 3 2	10 14 3 7
16 9 7 2	6 3 12 13	8 5 12 9	8 4 13 9
6 3 13 12	16 9 2 7	10 4 13 7	15 11 2 6
			δ
1 5 16 12	1 5 16 12	1 5 16 12	1 7 10 16
10 14 3 7	15 14 3 2	8 14 3 9	8 14 3 9
15 11 6 2	10 11 6 7	10 4 13 7	12 2 15 5
8 4 9 13	8 4 9 13	15 11 2 6	13 11 6 4
γ	β	γ	β
1 7 16 10	1 7 10 16	1 8 13 12	1 8 12 13
12 14 5 3	12 14 3 5	11 14 7 2	11 14 2 7
13 11 4 6	8 2 15 9	16 9 4 5	6 3 15 10
8 2 9 15	13 11 6 4	6 3 10 15	16 9 5 4
δ	δ	β	γ
1 11 6 16	1 4 13 16	1 4 13 16	1 4 16 13
12 14 3 5	12 15 2 5	14 15 2 3	14 15 3 2
8 2 15 9	14 9 8 3	12 9 8 5	7 6 10 11
13 7 10 4	7 6 11 10	7 6 11 10	12 9 5 8
β	γ	δ	
1 6 11 16	1 6 16 11	1 6 11 16	1 3 16 14
12 15 2 5	12 15 5 2	14 15 2 3	8 15 2 9
14 9 8 3	7 4 10 13	12 9 8 5	13 6 11 4
7 4 13 10	14 9 3 8	7 4 13 10	12 10 5 7

1 3 16 14 13 15 2 4 8 6 11 9 12 10 5 7	1 3 16 14 13 15 2 4 12 10 7 5 8 6 9 11	1 3 16 14 12 15 2 5 13 10 7 4 8 6 9 11	δ 1 4 13 16 8 15 2 9 14 5 12 3 11 10 7 6
β 1 4 13 16 14 15 2 3 8 5 12 9 11 10 7 6	γ 1 4 16 13 14 15 3 2 11 10 6 7 8 5 9 12	γ 1 8 11 14 10 15 4 5 16 9 6 3 7 2 13 12	β 1 8 14 11 10 15 5 4 7 2 12 13 16 9 3 6
δ 1 10 7 16 14 15 2 3 8 5 12 9 11 4 13 6	δ 1 6 11 16 7 15 2 10 14 4 13 3 12 9 8 5	δ 1 6 11 16 14 15 2 3 7 4 13 10 12 9 8 5	δ 1 7 14 12 9 15 4 6 8 2 13 11 16 10 3 5
1 7 14 12 9 15 4 6 16 10 5 3 8 2 11 13	δ 1 9 8 16 14 15 2 3 7 4 13 10 12 6 11 5	δ 1 6 11 16 8 15 2 9 12 3 14 5 13 10 7 4	γ 1 6 16 11 12 15 5 2 13 10 4 7 8 3 9 14
β 1 6 11 16 12 15 2 5 8 3 14 9 13 10 7 4	γ 1 8 13 12 10 15 6 3 16 9 4 5 7 2 11 14	β 1 8 12 13 10 15 3 6 7 2 14 11 16 9 5 4	δ 1 10 7 16 12 15 2 5 8 3 14 9 13 6 11 4

γ				γ				γ				γ			
1	4	15	14	1	4	14	15	1	6	15	12	1	6	12	15
13	16	3	2	13	16	2	3	11	16	5	2	11	16	2	5
8	5	10	11	12	9	7	6	8	3	10	13	14	9	7	4
12	9	6	7	8	5	11	10	14	9	4	7	8	3	13	10
γ				γ				γ				γ			
1	4	14	15	1	4	15	14	1	7	14	12	1	7	12	14
13	16	2	3	13	16	3	2	10	16	5	3	10	16	3	5
8	5	11	10	12	9	6	7	8	2	11	13	15	9	6	4
12	9	7	6	8	5	10	11	15	9	4	6	8	2	13	11
γ				γ				γ				γ			
1	6	15	12	1	6	12	15	1	7	14	12	1	7	12	14
11	16	5	2	11	16	2	5	10	16	5	3	10	16	3	5
14	9	4	7	8	3	13	10	15	9	4	6	8	2	13	11
8	3	10	13	14	9	7	4	8	2	11	13	15	9	6	4
γ				γ				α				α			
2	13	7	12	2	13	11	8	2	13	8	11	2	13	12	7
16	3	9	6	16	3	5	10	16	3	10	5	16	3	6	9
11	8	14	1	7	12	14	1	9	6	15	4	5	10	15	4
5	10	4	15	9	6	4	15	7	12	1	14	11	8	1	14
β				β				β				β			
2	14	7	11	2	14	11	7	2	14	11	7	2	14	7	11
15	3	10	6	15	3	6	10	15	3	6	10	15	3	10	6
12	8	13	1	5	9	16	4	8	12	13	1	9	5	16	4
5	9	4	16	12	8	1	13	9	5	4	16	8	12	1	13

δ				δ				δ				δ			
2	11	8	13	2	11	14	7	2	14	11	7	2	9	16	7
15	4	9	6	15	4	5	10	15	4	5	10	15	5	4	10
10	5	16	3	8	13	12	1	8	13	12	1	6	12	13	3
7	14	1	12	9	6	3	16	9	3	6	16	11	8	1	14
δ				γ				α				γ			
2	15	6	11	2	11	13	8	2	11	8	13	2	11	7	14
16	5	12	1	16	5	3	10	16	5	10	3	16	5	9	4
9	4	13	8	7	14	12	1	9	4	15	6	13	8	12	1
7	10	3	14	9	4	6	15	7	14	1	12	3	10	6	15
α				β				β				β			
2	11	14	7	2	12	7	13	2	12	13	7	2	12	13	7
16	5	4	9	15	5	10	4	15	5	4	10	15	5	4	10
3	10	15	6	14	8	11	1	3	9	16	6	8	14	11	1
13	8	1	12	3	9	6	16	14	8	1	11	9	3	6	16
β				δ				δ				δ			
2	12	7	13	2	9	16	7	2	15	4	13	2	11	14	7
15	5	10	4	15	6	3	10	16	6	11	1	12	6	3	13
9	3	16	6	4	11	14	5	9	3	14	8	5	9	16	4
8	14	1	11	13	8	1	12	7	10	5	12	15	8	1	10
δ				δ				γ				β			
2	11	14	7	2	9	8	15	2	9	15	8	2	9	8	15
13	6	3	12	11	7	10	6	16	7	1	10	16	7	10	1
4	9	16	5	16	4	13	1	5	14	12	3	11	4	13	6
15	8	1	10	5	14	3	12	11	4	6	13	5	14	3	12

γ				β				δ				δ			
2	11	5	16	2	11	16	5	2	14	3	15	2	9	8	15
14	7	9	4	14	7	4	9	16	7	10	1	13	7	10	4
15	6	12	1	3	10	13	8	11	4	13	6	16	6	11	1
3	10	8	13	15	6	1	12	5	9	8	12	3	12	5	14
β				γ				β				γ			
2	9	8	15	2	9	15	8	2	12	5	15	2	12	15	5
16	7	10	1	16	7	1	10	13	7	10	4	13	7	4	10
13	6	11	4	3	12	14	5	16	6	11	1	3	9	14	8
3	12	5	14	13	6	4	11	3	9	8	14	16	6	1	11
δ				δ				γ				β			
2	12	5	15	2	11	13	8	2	11	8	13	2	11	13	8
16	7	10	1	12	7	1	14	14	7	12	1	14	7	1	12
13	6	11	4	5	10	16	3	15	6	9	4	3	10	16	5
3	9	8	14	15	6	4	9	3	10	5	16	15	6	4	9
γ				β				δ				β			
2	12	15	5	2	12	5	15	2	13	11	8	2	9	7	16
13	7	4	10	13	7	10	4	14	7	1	12	15	8	10	1
8	14	9	3	11	1	16	6	3	10	16	5	14	5	11	4
11	1	6	16	8	14	3	9	15	4	6	9	3	12	6	13
β				β				β				δ			
2	9	16	7	2	9	16	7	2	9	7	16	2	9	16	7
15	8	1	10	15	8	1	10	15	8	10	1	12	8	1	13
3	12	13	6	5	14	11	4	12	3	13	6	5	11	14	4
14	5	4	11	12	3	6	13	5	14	4	11	15	6	3	10

Table Generale des Quarrez de Quatre.

δ				γ				α				γ			
2	9	16	7	2	11	7	14	2	11	14	7	2	11	16	5
13	8	1	12	13	8	12	1	13	8	1	12	13	8	3	10
4	11	14	5	16	5	9	4	3	10	15	6	7	14	9	4
15	6	3	10	3	10	6	15	16	5	4	9	12	1	6	15

α				ε				δ				δ			
2	11	5	16	2	3	16	13	2	15	10	7	2	5	12	15
13	8	10	3	15	9	6	4	16	9	8	1	11	9	8	6
12	1	15	6	10	8	11	5	3	6	11	14	14	4	13	3
7	14	4	9	7	14	1	12	13	4	5	12	7	16	1	10

δ								δ							
2	5	12	15	2	5	11	16	2	11	14	7	2	11	5	16
14	9	8	3	14	9	7	4	16	9	4	5	14	9	7	4
11	4	13	6	15	8	10	1	1	8	13	12	15	8	10	1
7	16	1	10	3	12	6	13	15	6	3	10	3	6	12	13

δ				γ				α				γ			
2	14	11	7	2	7	13	12	2	7	12	13	2	7	11	14
16	9	4	5	16	9	3	6	16	9	6	3	16	9	5	4
1	8	13	12	11	14	8	1	5	4	15	10	13	12	8	1
15	3	6	10	5	4	10	15	11	14	1	8	3	6	10	15

α				β				β				β			
2	7	14	11	2	8	11	13	2	8	13	11	2	8	13	11
16	9	4	5	15	9	6	4	15	9	4	6	15	9	4	6
3	6	15	10	14	12	7	1	3	5	16	10	12	14	7	1
13	12	1	8	3	5	10	16	14	12	1	7	5	3	10	16

β				δ				δ				δ			
2	8	11	13	2	5	11	16	2	11	14	7	2	11	5	16
15	9	6	4	15	10	8	1	15	10	3	6	15	10	8	1
5	3	16	10	14	7	9	4	1	8	13	12	14	7	9	4
12	14	1	7	3	12	6	13	16	5	4	9	3	6	12	13

δ				δ				δ				δ			
2	5	16	11	2	15	4	13	2	7	14	11	2	7	14	11
15	10	3	6	16	10	7	1	8	10	3	13	13	10	3	8
4	7	14	9	5	3	14	12	9	5	16	4	4	5	16	9
13	12	1	8	11	6	9	8	15	12	1	6	15	12	1	6

												δ			
2	3	16	13	2	10	15	7	2	10	15	7	2	5	12	15
10	11	8	5	13	11	6	4	16	11	6	1	7	11	6	10
15	6	9	4	3	5	12	14	3	8	9	14	16	4	13	1
7	14	1	12	16	8	1	9	13	5	4	12	9	14	3	8

β				β				γ				β			
2	5	15	12	2	5	12	15	2	7	9	16	2	7	16	9
16	11	1	6	16	11	6	1	14	11	5	4	14	11	4	5
9	14	8	3	7	4	13	10	15	10	8	1	3	6	13	12
7	4	10	13	9	14	3	8	3	6	12	13	15	10	1	8

δ				β				δ				β			
2	14	3	15	2	3	13	16	2	5	12	15	2	5	12	15
16	11	6	1	10	11	5	8	13	11	6	4	16	11	6	1
7	4	13	10	15	6	12	1	16	10	7	1	13	10	7	4
9	5	12	8	7	14	4	9	3	8	9	14	3	8	9	14

γ				β				γ				δ			
2	5	15	12	2	8	9	15	2	8	15	9	2	8	9	15
16	11	1	6	13	11	6	4	13	11	4	6	16	11	6	1
3	8	14	9	16	10	7	1	3	5	14	12	13	10	7	4
13	10	4	7	3	5	12	14	16	10	1	7	3	5	12	14
δ				γ				β				γ			
2	7	13	12	2	7	12	13	2	7	13	12	2	8	15	9
8	11	1	14	14	11	8	1	14	11	1	8	13	11	4	6
9	6	16	3	15	10	5	4	3	6	16	9	12	14	5	3
15	10	4	5	3	6	9	16	15	10	4	5	7	1	10	16
β				δ				δ				γ			
2	8	9	15	2	13	7	12	2	3	13	16	2	13	3	16
13	11	6	4	14	11	1	8	15	12	6	1	15	12	6	1
7	1	16	10	3	6	16	9	10	5	11	8	10	5	11	8
12	14	3	5	15	4	10	5	7	14	4	9	7	4	14	9
β				β				β				β			
2	5	11	16	2	5	16	11	2	5	16	11	2	5	11	16
15	12	6	1	15	12	1	6	15	12	1	6	15	12	6	1
14	9	7	4	3	8	13	10	9	14	7	4	8	3	13	10
3	8	10	13	14	9	4	7	8	3	10	13	9	14	4	7
δ				δ				γ				α			
2	5	16	11	2	5	16	11	2	7	11	14	2	7	14	11
8	12	1	13	13	12	1	8	13	12	8	1	13	12	1	8
9	7	14	4	4	7	14	9	16	9	5	4	3	6	15	10
15	10	3	6	15	10	3	6	3	6	10	15	16	9	4	5

	γ				α				δ				δ		
2	7	16	9	2	7	9	16	2	7	10	15	2	7	10	15
13	12	3	6	13	12	6	3	8	12	5	9	11	12	5	6
11	14	5	4	8	1	15	10	11	1	16	6	8	1	16	9
8	1	10	15	11	14	4	5	13	14	3	4	13	14	3	4
	δ												δ		
2	8	11	13	2	8	15	9	2	8	15	9	2	11	8	13
14	12	1	7	11	12	5	6	14	12	5	3	14	12	1	7
3	5	16	10	14	13	4	3	11	13	4	6	3	5	16	10
15	9	6	4	7	1	10	16	7	1	10	16	15	6	9	4
	δ				δ								δ		
2	1	16	15	2	1	16	15	2	1	15	16	2	11	14	7
11	13	4	6	14	13	4	3	14	13	3	4	12	13	8	1
14	8	9	3	11	8	9	6	11	8	10	5	5	4	9	16
7	12	5	10	7	12	5	10	7	12	6	9	15	6	3	10
	δ				δ				γ				β		
2	12	5	15	2	3	14	15	2	3	15	14	2	3	14	15
14	13	4	3	7	13	4	10	16	13	1	4	16	13	4	1
11	8	9	6	16	6	11	1	9	12	8	5	7	6	11	10
7	1	16	10	9	12	5	8	7	6	10	11	9	12	5	8
	γ				β				δ				δ		
2	7	9	16	2	7	16	9	2	12	5	15	2	3	14	15
12	13	3	6	12	13	6	3	16	13	4	1	11	13	4	6
15	10	8	1	5	4	11	14	7	6	11	10	16	10	7	1
5	4	14	11	15	10	1	8	9	3	14	8	5	8	9	12

β				γ				β				γ			
2	3	14	15	2	3	15	14	2	8	9	15	2	8	15	9
16	13	4	1	16	13	1	4	11	13	4	6	11	13	6	4
11	10	7	6	5	8	12	9	16	10	7	1	5	3	12	14
5	8	9	12	11	10	6	7	5	3	14	12	16	10	1	7

δ															
2	8	9	15	2	6	15	11	2	6	15	11	2	6	15	11
16	13	4	1	7	13	4	10	9	13	4	8	9	13	4	8
11	10	7	6	9	3	14	8	7	3	14	10	16	12	5	1
5	3	14	12	16	12	1	5	16	12	1	5	7	3	10	14

				δ				γ				β			
2	6	15	11	2	7	11	14	2	7	14	11	2	7	11	14
16	13	4	1	8	13	1	12	12	13	8	1	12	13	1	8
9	12	5	8	9	4	16	5	15	10	3	6	5	4	16	9
7	3	10	14	15	10	6	3	5	4	9	16	15	10	6	3

γ				β				δ							
2	8	15	9	2	8	9	15	2	11	7	14	2	4	15	13
11	13	6	4	11	13	4	6	12	13	1	8	5	14	3	12
14	12	3	5	7	1	16	10	5	4	16	9	16	7	10	1
7	1	10	16	14	12	5	3	15	6	10	3	11	9	6	8

												β			
2	4	15	13	2	4	13	15	2	5	12	15	2	3	13	16
16	14	3	1	16	14	1	3	16	14	1	3	15	14	4	1
5	7	10	12	9	11	8	6	9	11	8	6	12	9	7	6
11	9	6	8	7	5	12	10	7	4	13	10	5	8	10	11

β	β	β	
2 3 16 13	2 3 16 13	2 3 13 16	2 4 15 13
15 14 1 4	15 14 1 4	15 14 4 1	9 14 3 8
5 8 11 10	9 12 7 6	8 5 11 10	16 11 6 1
12 9 6 7	8 5 10 11	9 12 6 7	7 5 10 12
			δ
2 4 13 15	2 4 15 13	2 9 8 15	2 7 9 16
16 14 1 3	16 4 3 1	16 14 1 3	15 14 4 1
5 7 12 10	9 11 6 8	5 7 12 10	6 3 13 12
11 9 8 6	7 5 10 12	11 4 13 6	11 10 8 5
δ	γ	α	γ
2 9 7 16	2 7 13 12	2 7 12 13	2 7 16 9
15 14 4 1	11 14 8 1	11 14 1 8	11 14 5 4
6 3 13 12	16 9 3 6	5 4 15 10	13 12 3 6
11 8 10 5	5 4 10 15	16 9 6 3	8 1 10 15
α	γ	γ	γ
2 7 9 16	2 3 16 13	2 3 13 16	2 3 13 16
11 14 4 5	14 15 4 1	14 15 1 4	14 15 1 4
8 1 15 10	7 6 9 12	11 10 8 5	7 6 12 9
13 12 6 3	11 10 5 8	7 6 12 9	11 10 8 5
γ	γ	γ	γ
2 3 16 13	2 8 13 11	2 8 11 13	2 5 16 11
14 15 4 1	9 15 6 4	9 15 4 6	12 15 6 1
11 10 5 8	7 1 12 14	16 10 5 3	7 4 9 14
7 6 9 12	16 10 3 5	7 1 14 12	13 10 3 8

	γ				γ				γ				γ		
2	5	11	16	2	5	11	16	2	5	16	11	2	8	11	13
12	15	1	6	12	15	1	6	12	15	6	1	9	15	4	6
13	10	8	3	7	4	14	9	13	10	3	8	7	1	14	12
7	4	14	9	13	10	8	3	7	4	9	14	16	10	5	3

	γ				δ				β				γ		
2	8	13	11	2	3	14	15	2	3	14	15	2	3	15	14
9	15	6	4	11	16	1	6	13	16	1	4	13	16	4	1
16	10	3	5	13	10	7	4	11	10	7	6	8	5	9	12
7	1	12	14	8	5	12	9	8	5	12	9	11	10	6	7

	β				γ				δ						
2	5	12	15	2	5	15	12	2	5	12	15	2	4	13	15
11	16	1	6	11	16	6	1	13	16	1	4	14	16	3	1
13	10	7	4	8	3	9	14	11	10	7	6	7	5	10	12
8	3	14	9	13	10	4	7	8	3	14	9	11	9	8	6

													δ		
2	4	13	15	2	5	12	15	2	9	8	15	2	3	14	15
14	16	3	1	14	16	3	1	14	16	3	1	7	16	1	10
11	9	6	8	11	9	6	8	7	5	10	12	13	6	11	4
7	5	12	10	7	4	13	10	11	4	13	6	12	9	8	5

	γ				β				β				γ		
2	3	15	14	2	3	14	15	2	7	13	12	2	7	12	13
13	16	4	1	13	16	1	4	9	16	6	3	9	16	3	6
12	9	5	8	7	6	11	10	8	1	11	14	15	10	5	4
7	6	10	11	12	9	8	5	15	10	4	5	8	1	14	11

	δ				δ				δ						
2	9	8	15	2	3	14	15	2	3	14	15	2	8	11	13
13	16	1	4	8	16	1	9	11	16	1	6	10	16	5	3
7	6	11	10	11	5	12	6	8	5	12	9	15	9	4	6
12	3	14	5	13	10	7	4	13	10	7	4	7	1	14	12
	δ				δ				δ				γ		
2	8	11	13	2	10	7	15	2	5	12	15	2	5	15	12
10	16	5	3	11	16	1	6	7	16	1	10	11	16	6	1
7	1	12	14	8	5	12	9	11	4	13	6	14	9	3	8
15	9	6	4	13	3	14	4	14	9	8	3	7	4	10	13
	β				γ				β				δ		
2	5	12	15	2	7	14	11	2	7	11	14	2	9	8	15
11	16	1	6	9	16	5	4	9	16	4	5	11	16	1	6
7	4	13	10	15	10	3	6	8	1	13	12	7	4	13	10
14	9	8	3	8	1	12	13	15	10	6	3	14	5	12	3
	γ				α				γ				α		
3	13	6	12	3	13	8	10	3	13	10	8	3	13	12	6
16	2	9	7	16	2	11	5	16	2	5	11	16	2	7	9
10	8	15	1	9	7	14	4	6	12	15	1	5	11	14	4
5	11	4	14	6	12	1	15	9	7	4	14	10	8	1	15
	β				β				β				β		
3	14	8	9	3	14	9	8	3	14	12	5	3	14	5	12
15	2	12	5	15	2	5	12	15	2	8	9	15	2	9	8
10	7	13	4	6	11	16	1	6	11	13	4	10	7	16	1
6	11	1	16	10	7	4	13	10	7	1	16	6	11	4	13

	δ				δ				δ				δ		
3	9	16	6	3	14	7	10	3	10	7	14	3	13	12	6
14	4	5	11	16	4	13	1	13	4	9	8	15	4	5	10
7	13	12	2	9	5	12	8	12	5	16	1	2	9	16	7
10	8	1	15	6	11	2	15	6	15	2	11	14	8	1	11
	γ				α				α				δ		
3	10	13	8	3	10	8	13	3	10	15	6	3	9	8	14
16	5	2	11	16	5	11	2	16	5	4	9	12	5	10	7
6	15	12	1	9	4	14	7	2	11	14	7	13	4	15	2
9	4	7	14	6	15	1	12	13	8	1	12	6	16	1	11
	δ				β				β				β		
3	12	13	6	3	12	13	6	3	12	13	6	3	12	6	13
16	5	4	9	14	5	4	11	14	5	4	11	14	5	11	4
1	10	15	8	2	9	16	7	8	15	10	1	9	2	16	7
14	7	2	11	15	8	1	10	9	2	7	16	8	15	1	10
	δ				γ				β				β		
3	9	8	14	3	9	14	8	3	9	8	14	3	10	16	5
10	6	11	7	16	6	1	11	16	6	11	1	15	6	4	9
16	4	13	1	5	15	12	2	10	4	13	7	2	11	13	8
5	15	2	12	10	4	7	13	5	15	2	12	14	7	1	12
	δ				γ				γ				δ		
3	15	2	14	3	9	14	8	3	12	14	5	3	10	13	8
16	6	11	1	16	6	1	11	13	6	4	11	12	6	1	15
10	4	13	7	2	12	15	5	2	9	15	8	5	11	16	2
5	9	8	12	13	7	4	10	16	7	1	10	14	7	4	9

β				γ				β				δ			
3	10	13	8	3	12	14	5	3	12	5	14	3	13	10	8
15	6	1	12	13	6	4	11	13	6	11	4	15	6	1	12
2	11	16	5	8	15	9	2	10	1	16	7	2	11	16	5
14	7	4	9	10	1	7	16	8	15	2	9	14	4	7	9

δ				δ				δ				δ			
3	9	8	14	3	10	15	6	3	12	13	6	3	13	12	6
10	7	12	5	16	7	2	9	14	7	2	11	14	7	2	11
15	2	13	4	1	12	13	8	1	10	15	8	1	10	15	8
6	16	1	11	14	5	4	11	16	5	4	9	16	4	5	9

δ				δ				δ				β			
3	6	15	10	3	9	16	6	3	9	16	6	3	9	16	6
14	7	2	11	10	8	1	15	15	8	1	10	14	8	1	11
4	9	16	5	7	13	12	2	2	13	12	7	2	12	13	7
13	12	1	8	14	4	5	11	14	4	5	11	15	5	4	10

β				β				α				γ			
3	9	16	6	3	9	6	16	3	10	15	6	3	10	16	5
14	8	1	11	14	8	11	1	13	8	1	12	13	8	2	11
5	15	10	4	12	2	13	7	2	11	14	7	6	15	9	4
12	2	7	13	5	15	4	10	16	5	4	9	12	1	7	14

α				δ				δ				γδ			
3	10	5	16	3	6	15	10	3	6	15	10	3	12	5	14
13	8	11	2	12	8	1	13	13	8	1	12	15	8	9	2
12	1	14	7	5	9	16	4	4	9	16	5	6	1	16	11
6	15	4	9	14	11	2	7	14	11	2	7	10	13	4	7

δ				δ				δ				γ			
3	13	4	14	3	14	11	6	3	2	16	13	3	6	13	12
15	8	9	2	16	9	8	1	14	9	7	4	16	9	2	7
6	1	16	11	2	7	10	15	11	8	10	5	10	15	8	1
10	12	5	7	13	4	5	12	6	15	1	12	5	4	11	14
α				α.				δ				δ			
3	6	12	13	3	6	15	10	3	5	12	14	3	8	13	10
16	9	7	2	16	9	4	5	8	9	6	11	16	9	4	5
5	4	14	11	2	7	14	11	13	4	15	2	1	6	15	12
10	15	1	8	13	12	1	8	10	16	1	7	14	11	2	7
β				β				β							
3	8	13	10	3	8	13	10	3	8	10	13	3	2	16	13
14	9	4	7	14	9	4	7	14	9	7	4	11	10	8	5
2	5	16	11	12	15	6	1	5	2	16	11	14	7	9	4
15	12	1	6	5	2	11	16	12	15	1	6	6	15	1	12
												δ			
3	2	13	16	3	11	14	6	3	11	14	6	3	5	12	14
11	10	5	8	13	10	7	4	16	10	7	1	6	10	7	11
14	7	12	1	2	5	12	15	2	8	9	15	16	4	13	1
6	15	4	9	16	8	1	9	13	5	4	12	9	15	2	8
γ				β				β				δ			
3	5	14	12	3	5	12	14	3	6	16	9	3	15	2	14
16	10	1	7	16	10	7	1	15	10	4	5	16	10	7	1
9	15	8	2	6	4	13	11	2	7	13	12	6	4	13	11
6	4	11	13	9	15	2	8	14	11	1	8	9	5	12	8

γ				γ				δ				β			
3	5	14	12	3	8	14	9	3	6	13	12	3	6	13	12
16	10	1	7	13	10	4	7	8	10	1	15	15	10	1	8
2	8	15	9	2	5	15	12	9	7	16	2	2	7	16	9
13	11	4	6	16	11	1	6	14	11	4	5	14	11	4	5

γ				β				δ				δ			
3	8	14	9	3	8	9	14	3	13	6	12	3	2	16	13
13	10	4	7	13	10	7	4	15	10	1	8	14	11	5	4
12	15	5	2	6	1	16	11	2	7	16	9	7	6	12	9
6	1	11	16	12	15	2	5	14	4	11	5	10	15	1	8

δ				δ				δ				δ			
3	14	7	10	3	5	12	14	3	6	15	10	3	8	13	10
16	11	6	1	6	11	8	9	16	11	2	5	14	11	2	7
2	5	12	15	15	2	13	4	1	8	13	12	1	6	15	12
13	4	9	8	10	16	1	7	14	9	4	7	16	9	4	5

δ				δ				δ				δ			
3	13	8	10	3	6	12	13	3	6	12	13	3	2	13	16
14	11	2	7	8	11	5	10	10	11	5	8	14	11	7	1
1	6	15	12	9	2	16	7	7	2	16	9	11	5	10	8
16	4	9	5	14	15	1	4	14	15	1	4	6	15	4	9

δ															
3	13	2	16	3	2	15	14	3	2	16	13	3	7	10	14
14	12	7	1	16	12	1	5	7	12	6	9	16	12	1	5
11	5	10	8	9	13	8	4	14	5	11	4	9	13	8	4
6	4	15	9	6	7	10	11	10	15	1	8	6	2	15	11

					β				β				β		
3	7	14	10	3	5	16	10	3	5	16	10	3	5	10	16
16	12	5	1	14	12	1	7	14	12	1	7	14	12	7	1
2	6	11	15	2	8	13	11	9	15	6	4	8	2	13	11
13	9	4	8	15	9	4	6	8	2	11	13	9	15	4	6
	α				γ				α						
3	6	15	10	3	6	16	9	3	6	9	16	3	7	14	10
13	12	1	8	13	12	2	7	13	12	7	2	9	12	5	8
2	7	14	11	10	15	5	4	8	1	14	11	16	13	4	1
16	9	4	5	8	1	11	14	10	15	4	5	6	2	11	15
													δ		
3	7	10	14	3	7	14	10	3	9	8	14	3	2	15	14
16	12	1	5	16	12	5	1	16	12	1	5	6	13	4	11
2	6	15	11	9	13	4	8	2	6	15	11	16	7	10	1
13	9	8	4	6	2	11	15	13	7	10	4	9	12	5	8
	γ				β				γ				β		
3	2	14	15	3	2	15	14	3	6	9	16	3	6	16	9
16	13	1	4	16	13	4	1	12	13	2	7	12	13	7	2
9	12	8	5	6	7	10	11	14	11	8	1	5	4	10	15
6	7	11	10	9	12	5	8	5	4	15	10	14	11	1	8
	δ														
3	12	5	14	3	1	16	14	3	1	16	14	3	8	9	14
16	13	4	1	15	13	2	4	15	13	2	4	15	13	2	4
6	7	10	11	6	8	11	9	10	12	7	5	10	12	7	5
9	2	15	8	10	12	5	7	6	8	9	11	6	1	16	11

				δ				β				γ			
3	12	5	14	3	2	15	14	3	2	15	14	3	2	14	15
15	13	2	4	10	13	4	7	16	13	4	1	16	13	1	4
6	8	11	9	16	11	6	1	10	11	6	7	5	8	12	9
10	1	16	7	5	8	9	12	5	8	9	12	10	11	7	6
β				γ				δ				γ			
3	8	9	14	3	8	14	9	3	8	9	14	3	6	15	10
10	13	4	7	10	13	7	4	16	13	4	1	12	13	8	1
16	11	6	1	5	2	12	15	10	11	6	7	14	11	2	7
5	2	15	12	16	11	1	6	5	2	15	12	5	4	9	16
γ				γ				γ				γ			
3	8	14	9	3	2	13	16	3	2	16	13	3	5	16	10
10	13	7	4	15	14	1	4	15	14	4	1	12	14	7	1
15	12	2	5	10	11	8	5	6	7	9	12	6	4	9	15
6	1	11	16	6	7	12	9	10	11	5	8	13	11	2	8
γ				γ				γ				γ			
3	5	10	16	3	2	16	13	3	2	13	16	3	8	13	10
12	14	1	7	15	14	4	1	15	14	1	4	9	14	7	4
13	11	8	2	10	11	5	8	6	7	12	9	6	1	12	15
6	4	15	9	6	7	9	12	10	11	8	5	16	11	2	5
γ				γ				γ							
3	8	10	13	3	5	16	10	3	8	13	10	3	12	5	14
9	14	4	7	12	14	7	1	9	14	7	4	13	15	4	2
16	11	5	2	13	11	2	8	16	11	2	5	8	6	9	11
6	1	15	12	6	4	9	15	6	1	12	15	10	1	16	7

													β		
3	1	14	16	3	1	16	14	3	1	14	16	3	2	13	16
12	15	2	5	13	15	4	2	13	15	2	4	14	15	4	1
13	10	7	4	8	6	9	11	12	10	7	5	12	9	6	7
6	8	11	9	10	12	5	7	6	8	11	9	5	8	11	10
	β				β				β						
3	2	16	13	3	2	16	13	3	2	13	16	3	1	14	16
14	15	1	4	14	15	1	4	14	15	4	1	8	15	2	9
5	8	10	11	9	12	6	7	8	5	10	11	13	6	11	4
12	9	7	6	8	5	11	10	9	12	7	6	10	12	7	5
													δ		
3	1	14	16	3	1	16	14	3	8	9	14	3	2	16	13
13	15	2	4	13	15	4	2	13	15	4	2	8	15	1	10
8	6	11	9	12	10	5	7	12	10	5	7	9	6	12	7
10	12	7	5	6	8	9	11	6	1	16	11	14	11	5	4
	δ				γ				γ				δ		
3	2	16	13	3	6	13	12	3	6	16	9	3	4	13	14
10	15	1	8	10	15	8	1	10	15	5	4	6	16	1	11
7	6	12	9	16	9	2	7	13	12	2	7	15	9	8	2
14	11	5	4	5	4	11	14	8	1	11	14	10	5	12	7
	δ								δ				δ		
3	4	13	14	3	4	14	13	3	5	12	14	3	5	12	14
15	16	1	2	15	16	2	1	6	16	1	11	15	16	1	2
6	9	8	11	6	9	7	12	15	9	8	2	6	9	8	11
10	5	12	7	10	5	11	8	10	4	13	7	10	4	13	7

δ				β				γ				β			
3	2	15	14	3	2	15	14	3	2	14	15	3	5	12	14
10	16	1	7	13	16	1	4	13	16	4	1	10	16	1	7
13	11	6	4	10	11	6	7	8	5	9	12	13	11	6	4
8	5	12	9	8	5	12	9	10	11	7	6	8	2	15	9
γ				δ				δ				γ			
3	5	14	12	3	5	12	14	3	2	15	14	3	2	14	15
10	16	7	1	13	16	1	4	6	16	1	11	13	16	4	1
8	2	9	15	10	11	6	7	13	7	10	4	12	9	5	8
13	11	4	6	8	2	15	9	12	9	8	5	6	7	11	10
β				γ				β				δ			
3	2	15	14	3	6	12	13	3	6	13	12	3	9	8	14
13	16	1	4	9	16	2	7	9	16	7	2	13	16	1	4
6	7	10	11	14	11	5	4	8	1	10	15	6	7	10	11
12	9	8	5	8	1	15	10	14	11	4	5	12	2	15	5
3	2	15	14	3	7	10	14	3	7	10	14	3	9	8	14
12	16	5	1	12	16	5	1	12	16	5	1	12	16	5	1
13	9	4	8	13	9	4	8	6	2	11	15	6	2	11	15
6	7	10	11	6	2	15	11	13	9	8	4	13	7	10	4
γ				γ				β				β			
3	5	14	12	3	6	15	10	4	16	5	9	4	16	9	5
10	16	7	1	9	16	5	4	13	1	12	8	13	1	8	12
15	9	2	8	14	11	2	7	11	7	14	2	6	10	15	3
6	4	11	13	8	1	12	13	6	10	3	15	11	7	2	14

β				β				α				γ			
4	16	9	5	4	16	5	9	4	15	6	9	4	15	9	6
13	1	8	12	13	1	12	8	14	1	12	7	14	1	7	12
7	11	14	2	10	6	15	3	11	8	13	2	5	10	16	3
10	6	3	15	7	11	2	14	5	10	3	16	11	8	2	13
α				γ				δ				δ			
4	15	10	5	4	15	5	10	4	15	6	9	4	15	10	5
14	1	8	11	14	1	11	8	11	2	13	8	11	2	7	14
7	12	13	2	9	6	16	3	14	7	12	1	6	9	16	3
9	6	3	16	7	12	2	13	5	10	3	16	13	8	1	12
δ				δ				δ				δ			
4	15	10	5	4	9	8	13	4	14	11	5	4	10	15	5
14	2	7	11	14	3	10	7	16	3	6	9	13	3	6	12
3	9	16	6	11	6	15	2	1	10	15	8	8	14	11	1
13	8	1	12	5	16	1	12	13	7	2	12	9	7	2	16
δ				δ				β				γ			
4	13	8	9	4	9	15	6	4	9	15	6	4	10	13	7
15	3	14	2	10	5	3	16	16	5	3	10	15	5	2	12
10	6	11	7	7	12	14	1	1	12	14	7	6	16	11	1
5	12	1	16	13	8	2	11	13	8	2	11	9	3	8	14
β				δ				β				δ			
4	10	7	13	4	15	9	6	4	16	1	13	4	16	1	13
15	5	12	2	16	5	3	10	9	5	12	8	14	5	12	3
9	3	14	8	1	12	14	7	14	2	15	3	9	2	15	8
6	16	1	11	13	2	8	11	7	11	6	10	7	11	6	10

γ	β	δ	γ
4 14 7 9	4 14 9 7	4 11 6 13	4 15 1 14
11 5 16 2	11 5 2 16	9 5 12 8	10 5 11 8
13 3 10 8	6 12 15 1	14 2 15 3	13 2 16 3
6 12 1 15	13 3 8 10	7 16 1 10	7 12 6 9
γ	α	γ	α
4 14 1 15	4 15 1 14	4 15 5 10	4 15 10 5
11 5 10 8	9 6 12 7	9 6 16 3	9 6 3 16
13 3 16 2	16 3 13 2	14 1 11 8	7 12 13 2
6 12 7 9	5 10 8 11	7 12 2 13	14 1 8 11
δ	δ	β	β
4 16 9 5	4 13 2 15	4 13 7 10	4 13 10 7
13 6 3 12	9 6 11 8	11 6 16 1	11 6 1 16
2 11 14 7	16 3 14 1	14 3 9 8	5 12 15 2
15 1 8 10	5 12 7 10	5 12 2 15	14 3 8 9
β	δ	δ	δ
4 13 1 16	4 15 2 13	4 15 2 13	4 12 5 13
11 6 10 7	7 6 11 10	14 6 11 3	7 6 11 10
14 3 15 2	14 1 16 3	7 1 16 10	14 1 16 3
5 12 8 9	9 12 5 8	9 12 5 8	9 15 2 8
δ	δ	δ	γ
4 14 7 9	4 9 8 13	4 10 15 5	4 9 15 6
12 6 1 15	10 7 14 3	16 7 2 9	14 7 1 12
5 11 16 2	15 2 11 6	1 14 11 8	5 16 10 3
13 3 10 8	5 16 1 12	13 3 6 12	11 2 8 13

α				α				β				θ			
4	9	6	15	4	9	16	5	4	13	1	16	4	13	6	11
14	7	12	1	14	7	2	11	10	7	11	6	10	7	16	1
11	2	13	8	1	12	13	8	15	2	14	3	15	2	9	8
5	16	3	10	15	6	3	10	5	12	8	9	5	12	3	14
β				δ				δ				δ			
4	13	11	6	4	11	6	13	4	5	16	9	4	5	16	9
10	7	1	16	16	7	10	1	11	7	2	14	14	7	2	11
5	12	14	3	5	2	15	12	6	10	15	3	3	10	15	6
15	2	8	9	9	14	3	8	13	12	1	8	13	12	1	8
δ				δ				δ				δ			
4	14	3	13	4	9	6	15	4	9	16	5	4	9	16	5
16	7	10	1	11	8	13	2	11	8	1	14	14	8	1	11
5	2	15	12	14	1	12	7	6	15	10	3	3	15	10	6
9	11	6	8	5	16	3	10	13	2	7	12	13	2	7	12
δ				δ				δ				δ			
4	5	16	9	4	5	14	11	4	5	14	11	4	10	7	13
13	8	1	12	10	8	1	15	15	8	1	10	14	8	9	3
3	10	15	6	7	9	16	2	2	9	16	7	5	1	16	12
14	11	2	7	13	12	3	6	13	12	3	6	11	15	2	6
δ															
4	14	5	11	4	1	15	14	4	1	14	15	4	12	13	5
15	8	1	10	12	9	7	6	12	9	6	7	14	9	8	3
2	9	16	7	13	8	10	3	13	8	11	2	1	6	11	16
13	3	12	6	5	16	2	11	5	16	3	10	15	7	2	10

					δ				β				γ		
4	12	13	5	4	5	15	10	4	5	15	10	4	6	13	11
15	9	8	2	6	9	3	16	16	9	3	6	15	9	2	8
1	7	10	16	11	8	14	1	1	8	14	11	10	16	7	1
14	6	3	11	13	12	2	7	13	12	2	7	5	3	12	14

	β				δ				δ				β		
4	6	11	13	4	15	5	10	4	5	14	11	4	5	14	11
15	9	8	2	16	9	3	6	7	9	2	16	16	9	2	7
5	3	14	12	1	8	14	11	10	8	15	1	1	8	15	10
10	16	1	7	13	2	12	7	13	12	3	6	13	12	3	6

	γ				β				δ				γ		
4	7	13	10	4	7	10	13	4	14	5	11	4	6	13	11
14	9	3	8	14	9	8	3	16	9	2	7	15	9	2	8
11	16	6	1	5	2	15	12	1	8	15	10	1	7	16	10
5	2	12	15	11	16	1	6	13	3	12	6	14	12	3	5

	γ				δ				δ				δ		
4	7	13	10	4	1	15	14	4	13	12	5	4	3	14	13
14	9	3	8	13	10	8	3	15	10	7	2	6	10	7	11
1	6	16	11	12	7	9	6	1	8	9	16	15	5	12	2
15	12	2	5	5	16	2	11	14	3	6	11	9	16	1	8

	δ												δ		
4	3	14	13	4	3	14	13	4	6	11	13	4	6	15	9
15	10	7	2	16	10	1	7	16	10	1	7	16	10	5	3
6	5	12	11	9	15	8	2	9	15	8	2	1	7	12	14
9	16	1	8	5	6	11	12	5	3	14	12	13	11	2	8

δ				γ				α				α			
4	15	6	9	4	5	14	11	4	5	11	14	4	5	16	9
16	10	5	3	15	10	1	8	15	10	8	1	15	10	3	6
1	7	12	14	9	16	7	2	6	3	13	12	1	8	13	12
13	2	11	8	6	3	12	13	9	16	2	7	14	11	2	7
δ				δ				β				β			
4	5	16	9	4	13	2	15	4	7	14	9	4	7	14	9
13	10	3	8	16	10	7	1	13	10	3	8	13	10	3	8
2	7	14	11	5	3	14	12	1	6	15	12	11	16	5	2
15	12	1	6	9	8	11	6	16	11	2	5	6	1	12	15
β				δ				δ							
4	7	9	14	4	1	14	15	4	13	12	5	4	1	15	14
13	10	8	3	13	11	8	2	14	11	6	3	8	11	5	10
6	1	15	12	12	6	9	7	1	8	9	16	13	6	12	3
11	16	2	5	5	16	3	10	15	2	7	10	9	16	2	7
												γ			
4	1	16	13	4	8	9	13	4	8	13	9	4	5	15	10
15	11	2	6	15	11	2	6	15	11	6	2	14	11	1	8
10	14	7	3	10	14	7	3	1	5	12	16	9	16	6	3
5	8	9	12	5	1	16	12	14	10	3	7	7	2	12	13
α				α				β				β			
4	5	10	15	4	5	16	9	4	6	15	9	4	6	15	9
14	11	8	1	14	11	2	7	13	11	2	8	13	11	2	8
7	2	13	12	1	8	13	12	1	7	14	12	10	16	5	3
9	16	3	6	15	10	3	6	16	10	3	5	7	1	12	14

β			δ
4 6 9 15	4 8 13 9	4 8 13 9	4 1 16 13
13 11 8 2	10 11 6 7	15 11 6 2	6 12 5 11
7 1 14 12	15 14 3 2	10 14 3 7	15 7 10 2
10 16 3 5	5 1 12 16	5 1 12 16	9 14 3 8
δ	δ		δ
4 1 16 13	4 6 15 9	4 6 9 15	4 14 3 13
15 12 5 2	14 12 7 1	14 12 1 7	15 12 5 2
6 7 10 11	3 5 10 16	11 13 8 2	6 7 10 11
9 14 3 8	13 11 2 8	5 3 16 10	9 1 16 8
δ	δ		γ
4 1 15 14	4 13 8 9	4 6 15 9	4 1 14 15
13 12 6 3	15 12 5 2	14 12 7 1	16 13 2 3
8 5 11 10	1 6 11 16	11 13 2 8	9 12 7 6
9 16 2 7	14 3 10 7	5 3 10 16	5 8 11 10
γ	γ	γ	γ
4 1 15 14	4 6 15 9	4 6 9 15	4 1 15 14
16 13 3 2	11 13 8 2	11 13 2 8	16 13 3 2
5 8 10 11	5 3 10 16	14 12 7 1	9 12 6 7
9 12 6 7	14 12 11 7	5 3 16 10	5 8 10 11
γ	χ	γ	γ
4 1 14 15	4 7 9 14	4 7 14 9	4 6 15 9
16 13 2 3	10 13 3 8	10 13 8 13	11 13 8 2
5 8 11 10	15 12 16 1	5 12 11 16	14 12 1 7
9 12 7 6	5 2 16 11	15 12 1 6	5 13 10 16

γ				δ				γ				β			
4	7	14	9	4	1	16	13	4	1	13	16	4	1	16	13
10	13	8	3	5	14	3	12	15	14	2	3	15	14	3	2
15	12	1	6	15	8	9	2	10	11	7	6	5	8	9	12
5	2	11	16	10	11	6	7	5	8	12	9	10	11	6	7

γ				β				δ							
4	5	10	15	4	5	15	10	4	11	6	13	4	2	13	15
11	14	1	8	11	14	8	1	15	14	3	2	9	14	3	8
13	12	7	2	6	3	9	16	5	8	9	12	16	11	6	1
6	3	16	9	13	12	2	7	10	1	16	7	5	7	12	10

												δ			
4	2	13	15	4	2	13	15	4	2	13	15	4	1	16	13
16	14	3	1	5	14	3	12	16	14	3	1	9	14	3	8
9	11	6	8	16	7	10	1	5	7	10	12	15	12	5	2
5	7	12	10	9	11	8	6	9	11	8	6	6	7	10	11

β				γ				β				β			
4	1	16	13	4	1	13	16	4	7	10	13	4	7	13	10
15	14	3	2	15	14	2	3	9	14	3	8	9	14	8	3
9	12	5	8	6	7	11	10	15	12	5	2	6	1	11	16
6	7	10	11	9	12	8	5	6	1	16	11	15	12	2	5

δ				γ				γ				δ			
4	7	10	13	4	5	16	9	4	7	13	10	4	3	14	13
15	14	3	2	11	14	7	2	9	14	8	3	5	15	2	12
9	12	5	8	13	12	1	8	16	11	1	6	16	10	7	1
6	1	16	11	6	3	10	15	5	2	12	15	9	6	11	8

δ								δ				δ			
4	3	14	13	4	3	13	14	4	5	16	9	4	6	11	13
16	15	2	1	16	15	1	2	6	15	10	3	16	15	2	1
5	10	7	12	5	10	8	11	11	2	7	14	5	10	7	12
9	6	11	8	9	6	12	7	13	12	1	8	9	3	14	8
δ				γ				β				γ			
4	1	16	13	4	1	13	16	4	1	16	13	4	5	11	14
5	15	2	12	14	15	3	2	14	15	2	3	10	15	1	8
14	8	9	3	11	10	6	7	5	8	9	12	13	12	6	3
11	10	7	6	5	8	12	9	11	10	7	6	7	2	16	9
β				δ				δ				β			
4	5	14	11	4	10	7	13	4	1	16	13	4	1	16	13
10	15	8	1	14	15	2	3	9	15	2	8	14	15	2	3
7	2	9	16	5	8	9	12	14	12	5	3	9	12	5	8
13	12	3	6	11	1	16	6	7	6	11	10	7	6	11	10
γ				β				γ				δ			
4	1	13	16	4	6	11	13	4	6	13	11	4	6	11	13
14	15	3	2	9	15	2	8	9	15	8	2	14	15	2	3
7	6	10	11	14	12	5	3	7	1	10	16	9	12	5	8
9	12	8	5	7	1	16	10	14	12	3	5	7	1	16	10
								γ				γ			
4	1	16	13	4	8	9	13	4	5	16	9	4	6	13	11
11	15	6	2	11	15	6	2	10	15	6	3	9	15	8	2
14	10	3	7	14	10	3	7	13	12	1	8	16	10	1	7
5	8	9	12	5	1	16	12	7	2	11	14	5	3	12	14

δ				δ				δ				δ			
4	2	15	13	4	2	15	13	4	2	15	13	4	2	15	13
5	16	1	12	14	16	1	3	7	16	1	10	14	16	1	3
14	9	8	3	5	9	8	12	14	11	6	3	7	11	6	10
11	7	10	6	11	7	10	6	9	5	12	8	9	5	12	8
δ				δ				δ				δ			
4	5	12	13	4	5	12	13	4	5	14	11	4	7	10	13
7	16	1	10	14	16	1	3	7	16	9	2	14	16	1	3
14	11	6	3	7	11	6	10	10	1	8	15	5	9	8	12
9	2	15	8	9	2	15	8	13	12	3	6	11	2	15	6
β				β				β				β			
4	1	14	15	4	1	15	14	4	1	15	14	4	1	14	15
13	16	3	2	13	16	2	3	13	16	2	3	13	16	3	2
11	10	5	8	6	7	9	12	10	11	5	8	7	6	9	12
6	7	12	9	11	10	8	5	7	6	12	9	10	11	8	5
								γ				γ			
4	3	14	13	4	6	11	13	4	5	14	11	4	5	15	10
10	16	7	1	10	16	7	1	9	16	7	2	9	16	6	3
15	9	2	8	15	9	2	8	15	10	1	8	14	11	1	8
5	6	11	12	5	3	14	12	6	3	12	13	7	2	12	13
γ				β				γ				β			
5	11	10	8	5	12	9	8	5	10	11	8	5	12	9	8
16	2	3	13	15	2	3	14	16	3	2	13	14	3	2	15
4	14	15	1	4	13	16	1	4	15	14	1	4	13	16	1
9	7	6	12	10	7	6	11	9	6	7	12	11	6	7	10

γ				γ				δ				β			
5	9	12	8	5	9	12	8	5	10	11	8	5	10	11	8
16	4	1	13	16	4	1	13	14	4	1	15	15	4	1	14
3	15	14	2	2	14	15	3	3	13	16	2	2	13	16	3
10	6	7	11	11	7	6	10	12	7	6	9	12	7	6	9
β				δ				δ				δ			
5	11	10	8	5	11	10	8	5	4	13	12	5	11	8	10
14	4	1	15	15	4	1	14	11	6	3	14	15	6	9	4
3	13	16	2	2	13	16	3	8	9	16	1	2	3	16	13
12	6	7	9	12	6	7	9	10	15	2	7	12	14	1	7
δ				δ											
5	4	13	12	5	10	8	11	5	2	15	12	5	13	4	12
10	7	2	15	14	7	9	4	16	8	1	9	16	8	1	9
8	9	16	1	3	2	16	13	3	11	14	6	3	11	14	6
11	14	3	6	12	15	1	6	10	13	4	7	10	2	15	7
								α				α			
5	3	14	12	5	13	4	12	5	4	14	11	5	4	15	10
16	8	1	9	16	8	1	9	16	9	7	2	16	9	6	3
2	10	15	7	2	10	15	7	3	6	12	13	2	7	12	13
11	13	4	6	11	3	14	6	10	15	1	8	11	14	1	8
δ				δ				δ				δ			
5	3	16	10	5	3	16	10	5	6	11	12	5	15	2	12
6	9	4	15	15	9	4	6	16	9	8	1	16	9	8	1
11	8	13	2	2	8	13	11	3	4	13	14	3	4	13	14
12	14	1	7	12	14	1	7	10	15	2	7	10	6	11	7

δ				δ				δ				β			
5	2	15	12	5	8	10	11	5	3	14	12	5	3	14	12
8	9	4	13	16	9	7	2	4	10	7	13	16	10	7	1
10	7	14	3	1	4	14	15	16	6	11	1	4	6	11	13
11	16	1	6	12	13	3	6	9	15	2	8	9	15	2	8
β				δ											
5	4	16	9	5	15	2	12	5	1	16	12	5	14	4	11
15	10	6	3	16	10	7	1	14	10	3	7	15	10	8	1
2	7	11	14	4	6	11	13	4	8	13	9	2	3	13	16
12	13	1	8	9	3	14	8	11	15	2	6	12	7	9	6
δ				β				β				δ			
5	2	15	12	5	2	15	12	5	14	3	12	5	14	3	12
4	11	6	13	16	11	6	1	4	11	6	13	16	11	6	1
16	7	10	1	4	7	10	13	16	7	10	1	4	7	10	13
9	14	3	8	9	14	3	8	9	2	15	8	9	2	15	8
γ				γ				δ				δ			
5	2	16	11	5	3	16	10	5	3	16	10	5	3	16	10
15	12	6	1	14	12	7	1	11	13	8	2	2	13	8	11
4	7	9	14	4	6	9	15	6	4	9	15	15	4	9	6
10	13	3	8	11	13	2	8	12	14	1	7	12	14	1	7
δ				δ				δ				δ			
5	2	15	12	5	11	6	12	5	4	14	11	5	4	14	11
16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	3	2	2	13	3	16
3	8	9	14	3	8	9	14	1	8	10	15	15	8	10	1
10	11	6	7	10	2	15	7	12	9	7	6	12	9	7	6

δ				δ											
5	3	16	10	5	3	16	10	5	1	16	12	5	10	8	11
4	14	1	15	15	14	1	4	10	14	7	3	15	14	4	1
13	11	8	2	2	11	8	13	8	4	9	13	2	7	9	16
12	6	9	7	12	6	9	7	11	15	2	6	12	3	13	6

β				γ				δ				δ			
5	3	16	10	5	4	16	9	5	2	16	11	5	2	16	11
12	14	1	7	11	14	2	7	4	15	1	14	14	15	1	4
9	15	4	6	10	15	3	6	13	10	8	3	3	10	8	13
8	2	13	11	8	1	13	12	12	7	9	6	12	7	9	6

β				γ											
5	2	16	11	5	4	16	9	5	2	15	12	5	8	11	10
12	15	1	6	10	15	3	6	8	16	9	1	13	16	3	2
9	14	4	7	11	14	2	7	11	3	6	14	4	9	6	15
8	3	13	10	8	1	13	12	10	13	4	7	12	1	14	7

								δ				β			
5	8	10	11	5	8	10	11	5	2	15	12	5	2	15	12
13	16	2	3	3	16	2	13	10	16	1	7	11	16	1	6
4	9	7	14	14	9	7	4	11	13	4	6	10	13	4	7
12	1	15	6	12	1	15	6	8	3	14	9	8	3	14	9

β				δ				γ				γ			
5	3	14	12	5	3	14	12	5	4	14	11	5	4	15	10
10	16	1	7	11	16	1	6	9	16	2	7	9	16	3	6
11	13	4	6	10	13	4	7	12	13	3	6	12	13	2	7
8	2	15	9	8	2	15	9	8	1	15	10	8	1	14	11

β				γ				γ				δ			
6	11	10	7	6	12	9	7	6	10	11	7	6	9	12	7
16	1	4	13	15	1	4	14	15	3	2	14	13	3	2	16
3	14	15	2	3	13	16	2	4	16	13	1	4	14	15	1
9	8	5	12	10	8	5	11	9	5	8	12	11	8	5	10

β				β				δ				γ			
6	9	12	7	6	12	9	7	6	12	9	7	6	10	11	7
16	3	2	13	13	3	2	16	16	3	2	13	15	3	2	14
1	14	15	4	4	14	15	1	1	14	15	4	1	13	16	4
11	8	5	10	11	5	8	10	11	5	8	10	12	8	5	9

γ				β				δ				δ			
6	9	12	7	6	11	10	7	6	7	12	9	6	7	12	9
15	4	1	14	13	4	1	16	14	4	1	15	15	4	1	14
3	16	13	2	3	14	15	2	3	13	16	2	2	13	16	3
10	5	8	11	12	5	8	9	11	10	5	8	11	10	5	8

δ				δ				δ				δ			
6	12	7	9	6	12	7	9	6	3	14	11	6	12	7	9
14	4	1	15	15	4	1	14	12	5	4	13	16	5	10	3
3	13	16	2	2	13	16	3	7	10	15	2	1	4	15	14
11	5	10	8	11	5	10	8	9	16	1	8	11	13	2	8

								δ				β			
6	1	16	11	6	14	3	11	6	3	15	10	6	3	15	10
15	7	2	10	15	7	2	10	4	9	5	16	16	9	5	4
4	12	13	5	4	12	13	5	13	8	12	1	1	8	12	13
9	14	3	8	9	1	16	8	11	14	2	7	11	14	2	7

β 6 4 13 11 15 9 8 2 3 5 12 14 10 16 1 7	δ 6 15 3 10 16 9 5 4 1 8 12 13 11 2 14 7	α 6 3 13 12 15 10 8 1 4 5 11 14 9 16 2 7	α 6 3 16 9 15 10 5 4 1 8 11 14 12 13 2 7
γ 6 1 15 12 16 11 5 2 3 8 10 13 9 14 4 7	γ 6 4 15 9 13 11 8 2 3 5 10 16 12 14 1 7	δ 6 1 16 11 3 12 5 14 15 8 9 2 10 13 4 7	β 6 1 16 11 15 12 5 2 3 8 9 14 10 13 4 7
β 6 3 15 10 13 12 8 1 4 5 9 16 11 14 2 7	δ 6 13 4 11 15 12 5 2 3 8 9 14 10 1 16 7	δ 6 3 14 11 4 13 12 5 15 2 7 10 9 16 1 8	δ 6 4 15 9 16 13 2 3 1 12 7 14 11 5 10 8
γ 6 3 15 10 12 13 1 8 9 16 4 5 7 2 14 11	β 6 4 15 9 11 13 2 8 10 16 3 5 7 1 14 12	6 7 12 9 14 15 4 1 3 10 5 16 11 2 13 8	6 7 12 9 1 15 4 14 16 10 5 3 11 2 13 8
γ 6 3 13 12 10 15 1 8 11 14 4 5 7 2 16 9	δ 6 1 16 11 9 15 2 8 12 14 3 5 7 4 13 10	β 6 1 16 11 12 15 2 5 9 14 3 8 7 4 13 10	β 6 4 13 11 9 15 2 8 12 14 3 5 7 1 16 10

δ				γ				δ				δ			
6	4	13	11	6	3	16	9	6	2	15	11	6	2	15	11
12	15	2	5	10	15	4	5	7	16	1	10	12	16	1	5
9	14	3	8	11	14	1	8	12	13	4	5	7	13	4	10
7	1	16	10	7	2	13	12	9	3	14	8	9	3	14	8

δ				δ				β				γ			
6	3	14	11	6	3	14	11	6	1	15	12	6	3	15	10
7	16	1	10	12	16	1	5	11	16	2	5	9	16	4	5
12	13	4	5	7	13	4	10	10	13	3	8	12	13	1	8
9	2	15	8	9	2	15	8	7	4	14	9	7	2	14	11

δ				δ											
7	6	11	10	7	12	5	10	7	5	12	10	7	11	6	10
14	3	2	15	14	3	2	15	16	4	1	13	16	4	1	13
4	13	16	1	4	13	16	1	2	14	15	3	2	14	15	3
9	12	5	8	9	6	11	8	9	11	6	8	9	5	12	8

δ				δ											
7	2	15	10	7	16	1	10	7	1	16	10	7	15	2	10
12	5	4	13	12	5	4	13	14	6	3	11	14	6	3	11
6	11	14	3	6	11	14	3	4	12	13	5	4	12	13	5
9	16	1	8	9	2	15	8	9	15	2	8	9	1	16	8

δ				δ											
7	2	15	10	7	4	14	9	7	1	16	10	7	6	12	9
4	13	12	5	16	13	3	2	6	14	11	3	15	14	4	1
14	3	6	11	1	12	6	15	12	4	5	13	2	11	5	16
9	16	1	8	10	5	11	8	9	15	2	8	10	3	13	8

δ				δ											
7	2	16	9	7	2	16	9	7	4	14	9	7	4	14	9
6	15	1	12	12	15	1	6	11	16	2	5	5	16	2	11
11	14	4	5	5	14	4	11	6	13	3	12	12	13	3	6
10	3	13	8	10	3	13	8	10	1	15	8	10	1	15	8

α	....	48
β	....	192
γ	....	192
δ	....	328
	....	120
Somme		880

NOMBRE DES TABLES de chaque ſorte.

De celles qui ont	1 à l'un des coins, il y en a	208	208
De celles qui ont	2	200	200
	3	204	166
	4	238	178
	5	216	64
	6	206	48
	7	230	16
			Somme 880

Mais parce que des tables qui ont à l'un des coins, 3, 4, 5, 6, ou 7, ont auſſi à d'autres coins des nombres moindres, comme 1 ou 2, &c. on a mis en ſuite la multitude des tables qui ont quelqu'un de ces nombres à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands. Ainſi il y a 204 tables, qui ont trois à l'un de leurs coins; mais il n'y en a que cent ſoixante-ſix qui ayent 3 à l'un de leurs coins, & aux autres coins des nombres plus grands que 3. De meſme il y a deux cens trente tables qui ont 7 à l'un de leurs coins, mais il n'y en a que ſeize qui n'ayent à aucun de leurs coins des nombres moindres que 7.

A	6	3	13	12
	15	10	8	1
	4	5	11	14
	9	16	2	7

Les tables qui ont cette marque * en teſte, ont cette propriété, que quatre nombres eſtans pris en quarré dans cette table en quel-

que

que façon que ce soit, sont autant qu'un des costez. Ainsi en la table A, les nombres pris en quarré en tout sens, comme 6, 15, 3, 10, | 3, 10, 13, 8, | 13, 8, 12, 1, | 15, 10, 4, 5, | 10, 8, 5, 11, | 8, 1, 11, 14, | 4, 9, 16, 5, | 5, 16, 11, 2, | & 11, 2, 14, 7, | font 34, sçavoir autant que chacun des costez. De mesme, si on prend les angles des

6	3	13	12
15	10	8	1
4	5	11	14
9	16	2	7

quarrez de 3 de costé; sçavoir, 6, 4, 11, 13, | 3, 5, 14, 12, | 15, 8, 9, 2, | & 10, 1, 16, 7, & aussi les angles du quarré total, 6, 12, 9, 7, ils feront tous pareille somme de 34; & de ces tables il y en a en tout 48, & on peut faire 12 tables qui auront chacun des nombres à un des angles. Par exemple, il y a 12 tables qui ont 1 à l'un des angles, 12 qui ont 2, autant qui ont 3, 4, 5 ou 6, &c. mais parce qu'il y a quatre nombres ensemble à chaque table, cela se réduit à 48.

B				C			
6	3	15	10	6	1	16	11
13	12	8	1	12	15	2	5
4	5	9	16	9	14	3	8
11	14	2	7	7	4	13	10

Les tables qui ont cette marque β au dessus, ont la mesme égalité que devant, sinon qu'au milieu d'un des costez & à son opposé, il y a un des quarrez dont les nombres ne sont pas égaux à

 ceux.

ceux d'un des coſtez. Ainſi en la table B, les nombres 3, 15, 12, 8, & 5, 9, 14, 2, ne font pas 34; & en la table C, les nombres 12, 15, 9, 14, & 2, 5, 3, 8 ne font pas 34. Mais ſi on prend les huit enſemble, ils font le double de 34, puiſqu'ils comprennent deux lignes; & de ces tables il y en a en tout 192.

D			
6	3	15	10
12	13	1	8
9	16	4	5
7	2	14	11

Les tables marquées γ, n'ont que les quarrez des angles qui ayent cette égalité avec celuy du milieu, mais non pas ceux du milieu des coſtez. Ainſi la table D a égalité dans les nombres 6, 12, 3, 13, | 15, 1, 8, 10, | 9, 16, 7, 2, | 4, 5, 14, 11, | & 13, 1, 16, 4, | & pareillement aux nombres des angles des quarrez de 3 de coſté; ſçavoir, 6, 15, 4, 9, | 10, 3, 16, 5, | 7, 12, 1, 14, | & 2, 13, 8, 11; & enfin au quarré total, 6, 7, 10, 11: & de ces tables il y en a en tout 192.

c — d

E

6	13	4	11
15	12	5	2
3	8	9	14
10	1	16	7

F

6	3	14	11
4	13	12	5
15	2	7	10
9	16	1	8

a — b

Les

Les tables qui ont cette marque ʒ, n'ont égalité, outre les angles du grand quarré, & ceux du quarré du milieu, (ausquels il y a égalité dans toutes les tables) que deux autres quarrez aux costez opposez. Ainsi la table E n'a égalité qu'aux nombres 13, 4, 12, 5, | & 8, 9, 1, 16, | & en outre aux angles extérieurs, 6, 11, 10, 7, & au quarré du milieu, 12, 5, 8, 9. Et la table F n'a égalité qu'aux nombres 4, 13, 15, 2, & 12, 5, 7, 10; & aux angles extérieurs, 6, 11, 9, 8; & au quarré du milieu, 13, 12, 2, 7: & de ces tables il y en a 328. Or ces égalitez se doivent toûjours entendre outre les lignes qui sont supposées égales entre elles.

Les autres tables qui n'ont point de marque, n'ont rien que ce qui est commun à toutes; sçavoir le petit quarré du milieu, & le grand du dehors, où il y ait égalité aux nombres des angles, & de ces tables il y en a 120.

Or on démontrera, comme il s'ensuit, que les nombres qui sont aux angles de l'enceinte extérieure de la table de 4, & pareillement les 4 intérieurs, sont égaux à une des lignes. Par exemple, au quarré E les quatre nombres 6, 11, 10, 7 vallent necessairement 34, & pareillement 12, 5, 8, 9, sçavoir autant qu'une des lignes.

En la table E, si les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ne vallent pas ensemble 34, il faut qu'ils fassent plus ou moins de 34; qu'ils vallent moins. Mais parce que les nombres de chaque ligne doivent faire 34, les lignes *a b*, & *c d* feront chacune 34. Il faudra donc que les quatre nombres qui sont entre les angles dans les lignes *a b*, & *c d*, fassent ensemble plus de 34, & ils doivent surpasser 34 d'un nombre égal à celuy de l'excés de 34, pardessus les nombres des angles *a*, *b*, *c*, *d*, & pareillement les quatre nombres qui sont entre les angles des lignes *c a*, & *d b*; sçavoir ceux qui seront à la place où sont 15, 3, 2, 14, excéderont 34 d'un nombre égal à celuy dont 34 excéde les nombres des angles; & par conséquent les nombres qui sont à l'enceinte extérieure en-

tre

tre les angles, excéderont deux fois 34 du double du mesme excés. Mais les 16 nombres ensemble doivent faire quatre fois 34: & partant les huit nombres qui restent, sçavoir les quatre des angles *a*, *b*, *c*, *d*, & les quatre intérieurs qui doivent estre mis à la place où sont 12, 5, 8, 9, seront moindres que deux fois 34, du double du mesme excés: mais les quatre qui sont aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, sont moindres que 34, selon le mesme excés, donc les quatre intérieurs seront moindres aussi que 34, selon le mesme excés. Et parce que toutes les lignes doivent estre égales, posons que l'une des lignes transversales, comme *c b*, contienne quatre nombres, qui ensemble fassent 34, il s'ensuivra que les quatre autres contenus en la ligne *a d*, feront moins de 34, du double de l'excés de 34, par dessus les quatre qui sont aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, ce qui est absurde & contre l'hypotése: la mesme chose se fera voir, si on suppose les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, plus grands que 34; car on montrera de mesme, que les nombres d'une des lignes transversales seront plus grands que 34 du double de l'excés; & partant les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, sont égaux à 34. Ce qu'il falloit démontrer.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*k*	*l*	*m*
n	*o*	*p*	*q*

Mais la mesme chose se demontrera bien plus briévement, comme s'ensuit. En la table *a*, *d*, *n*, *q*, les quatre nombres des angles *a*, *d*, *n*, *q*, sont égaux aux quatre intérieurs *f*, *g*, *k*, *l*; car les quatre, *a*, *d*, *n*, *q*, sont complémens à deux lignes (sçavoir à 68) des quatre nombres, *b*, *c*, *o*, *p*, & les quatre, *f*, *g*, *k*, *l*, des quatre *e*, *i*, *h*, *m*. Mais les mesmes huit nombres,

a, *d*,

a, *d*, *n*, *q*, *f*, *g*, *k*, *l*, font enfemble deux lignes, fçavoir les deux diagonales; & partant, tant les quatre, *a*, *d*, *n*, *q*, que les quatre, *f*, *g*, *k*, *l*, font autant qu'une ligne. Et de là il s'enfuit auffi, qu'en toute table les quatre *b*, *c*, *o*, *p*, font une ligne, parcillement les quatre *e*, *i*, *h*, *m*.

En toute table ou quarré qui a quatre de cofté, les quatre nombres qui font à l'un des angles de la figure, comme *a*, *b*, *e*, *f*, font égaux aux quatre nombres, *l*, *m*, *p*, *q*, qui font à l'angle diamétralement oppofé, parce que les uns & les autres font le complément à deux lignes des quatre nombres *c*, *d*, *g*, *h*.

Pareillement, en toute table les quatre nombres des angles d'un des quarrez de trois, comme *a*, *e*, *l*, *i*, font égaux aux quatre *f*, *b*, *q*, *o*, du quarré oppofé, parce que les uns & les autres font le complément à deux lignes des quatre *h*, *d*, *m*, *k*.

Si en quelque table de 4, les quatre nombres d'un des petits quarrez des angles, comme de *a*, *b*, *f*, *e*, font enfemble égaux à une ligne; les autres petits quarrez des angles, comme *c*, *d*, *g*, *h*, &c. le feront auffi; & pareillement les nombres des angles du quarré de 3, comme *a*, *c*, *l*, *i*, ou *b*, *d*, *m*, *k*, &c

La raifon eft, que *a*, *b*, *f*, *e*, étant égaux aux quatre *l*, *m*, *q*, *p*, comme on vient de démontrer, fi les uns vallent une ligne, les autres en vaudront autant. Et pareillement les autres petits quarrez, fçavoir *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, qui font leurs complémens à deux lignes.

Mais puifque les huit, *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, vallent deux lignes; par fuppofition, fi on en ofte une ligne, fçavoir *d*, *g*, *k*, *n*, le refte, qui font les quatre *c*, *h*, *i*, *o*, vaudront auffi une ligne; & ainfi les huit, *a*, *c*, *l*, *i*, & *b*, *f*, *o*, *q*, qui font les angles des deux quarrez de trois oppofez, vaudroit deux lignes, puifque les huit nombres font les quatre *c*, *i*, *o*, *h*, qui vallent une ligne, & les quatre de la diagonale, *a*, *f*, *l*, *q*: mais on a démontré, que les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, font égaux aux quatre *b*, *f*, *o*, *q*: donc tant les uns que les autres vallent une ligne.

On montrera de mesme, que si les quatre des angles du quarré de trois, comme *a*, *c*, *l*, *i*, vallent une ligne chacun des petits quarrez des angles, comme *a*, *b*, *e*, *f*, &c. vaudront une ligne.

Car si les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, vallent une ligne, les quatre *b*, *f*, *o*, *q*, qui leur sont égaux, en vaudront une pareillement: & si de ces huit, qui vallent deux lignes, on oste la diagonale *a*, *f*, *l*, *q*, restera une ligne pour la valeur des quatre autres, *c*, *b*, *i*, *o*, ausquels ajoûtant la diagonale *d*, *g*, *k*, *n*, on aura deux lignes pour la valeur des huit nombres *c*, *b*, *d*, *g*; *k*, *n*, *i*, *o*; mais on a montré qu'en toute table de quatre, les quatre *i*, *k*, *n*, *o*, sont égaux aux quatre *c*, *d*, *g*, *b*; donc tant les uns que les autres vallent une ligne.

FIN.

NB. *La page 333 suit immediatement apres 312.*